

1. ÜNİTE : SAYMA VE OLASILIK

Sıralama ve Seçme

Sayma Yöntemleri

Bire Bir Eşleme Yoluyla Sayma:

Bir kümenin eleman sayısını, verilen kümenin elemanları ile pozitif tam sayılar kümesinin elemanları arasında bire bir eşleme yaparak bulma işlemine **bire bir eşleme yoluyla sayma** denir.

Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesindeki rakamlar kullanılarak üç basamaklı

- Kaç doğal sayı oluşturulabileceğini
- Rakamları farklı kaç doğal sayı oluşturulabileceğini
- Kaç çift doğal sayı oluşturulabileceğini
- Rakamları farklı kaç çift doğal sayı oluşturulabileceğini bulalım.

Çözüm: a. her bir basamak için yazılabilecek rakam ve sayılar gösterilmiştir. Buna göre oluşturulabilecek üç basamaklı doğal sayıların sayısı, $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ olur.

b. Oluşturulacak üç basamaklı sayıların rakamlarının farklı olması istendiğinden her basamakta kullanılacak rakam sayısı gösterildiği gibi bir eksiltir. Buna göre oluşturulabilecek rakamlar farklı üç basamaklı doğal sayıların sayısı, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olur.

c. Çift doğal sayı oluşturulması istendiğinden birler basamağına 2 veya 4 rakam yazılabilir. Onlar ve yüzler basamaklarına rakamların tamam yazılabilir. Anlaşılacağı gibi oluşturulabilecek üç basamaklı çift doğal sayıların sayısı, $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ olur.

Toplama Yoluyla Sayma

Ayrık iki kümenin birleşiminin eleman sayısını toplama işlemi yaparak bulmaya, toplama yoluyla sayma yöntemi adı verilir. A ve B sonlu ve ayrık iki küme olmak üzere

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) \text{ dir.}$$

Örnek

5 farklı pasta ve 6 farklı sütlü tatlı arasından 1 pasta veya 1 sütlü tatlı kaç farklı şekilde seçilir bulalım.

Pasta kümesine P dersek $s(P) = 5$, sütlü tatlı kümesine T dersek $s(T) = 6$ olur.

$$s(P \cup T) = s(P) + s(T)$$

$$s(P \cup T) = 5 + 6 = 11 \text{ buluruz.}$$

Çarpma Yoluyla Sayma

Ayrık iki kümenin kesişiminin eleman sayısını çarpma işlemi yaparak bulmaya, çarpma yoluyla sayma yöntemi adı verilir.

m herhangi bir işlemin gerçekleşme yollarının sayısını, n de ikinci bir işlemin gerçekleşme yollarının sayısını gösterebilir. m yoldan birisi ile yapılan ilk işlemden sonra ikinci işlem n yolla yapılabilir ise bu iki işlem birlikte m.n yolla yapılabilir. Bu durum işlem sayısı arttığında da geçerlidir. Yani; A, B ve C boş olmayan ayrık birer küme olmak üzere,

** A ve B kümelerinden birer eleman seçerek oluşturulabilecek tüm sıralı ikililerin sayısı;

$$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$$

** A, B ve C kümelerinden birer eleman seçilerek oluşturulacak tüm sıralı üçlülerin sayısı;

$$s(A \times B \times C) = s(A) \cdot s(B) \cdot s(C)$$

şeklinde çarpma işlemi ile bulunur.

Faktöriyel

1 den n ye kadar olan sayma sayılarının çarpımına n faktöriyel denir ve $n!$ şeklinde gösterilir. Özel olarak sıfır faktöriyel bire eşittir. ($0! = 1$)

Bazı doğal sayıların faktöriyelleri

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1.2 = 2$$

$$3! = 1.2.3 = 6$$

$$4! = 1.2.3.4 = 24$$

$$5! = 1.2.3.4.5 = 120$$

$$6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$$

$$7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5040$$

NOT: n! aşağıdaki şekillerde de yazılabilir.

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)!$$

Örnek

Anne, baba ve 3 çocuktan oluşan bir aile, anne ve baba yan yana olmak şartıyla kaç farklı biçimde sıralanabilir bulalım.

Anne ve baba her zaman yan yana olacağı için anne ile baba 1 kişi (A-B) gibi düşünölür.

A-B, Ç1, Ç2, Ç3 nesnelерinin sıralaması 4! biçimde gerçekteşir. Anne ve baba kendi aralarında da 2! (A-B, B-A) şeklinde yer değiştirebilir.

Sonuç olarak $4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$ sıralama yapılabilir.

Permütasyon

n ve r birer doğal sayı ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin birbirinden farklı r tane elemanından oluşan dizilişlerin her birine n'nin r'li **permütasyonu (dizilişi)** denir.

Örnek:

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin ikili permütasyonlarını yazalım.

A kümesinin elemanlarını ikişerli seçerek sıralı ikili şeklinde yazarsak:

(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1) ve (3, 2) elde ederiz.

3 elemanlı bir kümenin ikili permütasyonlarının sayısı 6'dır.

Permütasyon Sayısı

n elemanlı bir kümenin r'li permütasyonlarının sayısı P (n, r) ile gösterilir.

$$P(n - r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Örnek

7'nin 3'lü permütasyonlarının sayısını yani P (7, 3) değerini bulalım.

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7 - 3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Permütasyon Özellikleri

1. n'nin sıfırlı permütasyonlarının sayısı

$$P(n, 0) = \frac{n!}{(n - 0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

n'nin n'li permütasyonlarının sayısı

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Tekrarlı Permütasyon

Bazı elemanları özdeş olan n elemanlı bir kümenin n'li permütasyonlarına **tekrarlı permütasyon** denir.

n elemanlı bir kümenin elemanlarının n_1 tanesi birbiriyle özdeş, n_2 tanesi birbiriyle özdeş, ..., n_r tanesi birbiriyle özdeş ise bu kümenin n 'li permütasyonlarının sayısı $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_r!}$ ile bulunur.

Kombinasyon

n ve r birer doğal sayı ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin her birine **n 'nin r 'li kombinasyonu** denir.

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{P(n, r)}{r!} \text{ dir.}$$

Örneğin;

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21 \text{ dir.}$$

Pratik olarak

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r(r-1)(r-2) \dots r \cdot 1} \text{ olduğundan}$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ olur.}$$

Kombinasyonun Özellikleri

$$1) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Örneğin; $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ olur.

$$2) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$3) \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

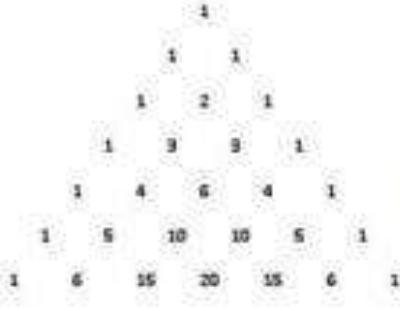
$$4) \binom{n}{r} = \binom{n}{k} \text{ ise } r = k \text{ veya } n = r + k \text{ olur.}$$

$$5) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ dir.}$$

$$6) \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

Pascal Üçgeni ve Binom Açılımı

Hintli matematikçiler ona Meru Dağı'nın merdivenleri der. İran'da Hayyam Üçgeni olarak bilinir. Çin'de ise Yang Hui'nin Üçgeni adı verilir. Batı dünyası da onu genelde **Pascal Üçgeni** olarak tanır.



n=0 için $(a + b)^0$ in katsayı
n=1 için $(a + b)^1$ in katsayıları
n=2 için $(a + b)^2$ nin katsayıları
n=3 için $(a + b)^3$ ün katsayıları
n=4 için $(a + b)^4$ ün katsayıları
n=5 için $(a + b)^5$ in katsayıları
n=6 için $(a + b)^6$ nin katsayıları

Binom Açılımı

Bilinen özdeşlikler vardır bunlar;

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = (x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Kuvvet büyüdükçe özdeşliği çarpma işlemi yaparak bulmak zorlaşır. Bu durumda kombinasyon yardımıyla binom açılımını kullanarak özdeşlikleri bulabiliriz.

x ve y sıfırdan farklı ve n bir doğal sayı olmak $(x + y)^n$ ifadesinin x ve y'nin kuvvetleri cinsinden açılımına **binom açılımı** denir.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Binom açılımında terimleri oluştururken katsayıları kombinasyon yardımıyla hesaplarız. x'in azalan kuvvetlerine göre açılım yaparken x'in üssünü n'den başlayıp her terimde bir azaltırız, y'nin üssünü 0'dan başlayıp her terimde bir arttırırız. Böylece son terimde x'in üssü 0, y'nin üssü n olmuş olur.

Örnek

$(x + y)^4$ ifadesinin özdeşini Pascal üçgeninden faydalanarak x'in artan kuvvetlerine göre yazalım.

Terimlerin katsayılarının 1 4 6 4 1 olduğunu Pascal üçgeninin 5. satırından görebiliriz. x'in kuvvetlerini 0'dan 4'e doğru, y'nin kuvvetlerini 4'ten 0'a doğru sırayla terimlere yazarız.

$$(x + y)^4 = 1 x^0 y^4 + 4 x^1 y^3 + 6 x^2 y^2 + 4 x^3 y^1 + 1 x^4 y^0$$

Katsayılardaki 1'leri, x^0 ve y^0 ifadelerini 1'e eşit oldukları için yazmamıza gerek yoktur.

$$(x + y)^4 = y^4 + 4 x y^3 + 6 x^2 y^2 + 4 x^3 y + x^4$$

Binom Açılımı Özellikleri

Terim sayısı

$(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki terim sayısı $n+1$ 'dir.

Örnek: $(2x + 3y)^{10}$ ifadesinin açılımında $10+1 = 11$ terim vardır.

Terimlerdeki üsler toplamı

$(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki her bir terimdeki x ve y değişkenlerinin üsleri toplamı n'dir.

Örnek: $(3x - y)^8$ ifadesinin x'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki baştan 7. terimi inceleyelim.

Bu ifadenin açılımdaki 7. terimi $252x^2y^6$ dir. Burdaki x'in ve y'nin üslerini toplarsak $2 + 6 = 8$ olduğunu görürüz.

Baştan r+1 inci terim

$(x+y)^n$ ifadesinin x'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki baştan r + 1'inci terim $\binom{n}{r}(x)^{n-r}(y)^r$ dir.

Sondan r+1 inci terim

$(x+y)^n$ ifadesinin x'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki sondan r + 1'inci terim $\binom{n}{r}(x)^{n-r}(y)^r$

Ortanca terim

n doğal sayı olmak üzere $(x+y)^{2n}$ ifadesinin açılımındaki ortadaki terim $\binom{2n}{n}(x)^n(y)^n$ dir.

Katsayılar toplamı

$(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki katsayılar toplamını bulmak için değişkenler yerine 1 sayısı yazılır.

Sabit terim

$(x+y)$ 'nin ifadesinin açılımındaki sabit terimi bulmak için değişkenler yerine 0 sayısı yazılır.

Basit Olayların Olasılıkları

Olasılık hem günlük hayatta hem de değişik bilim dallarında çok sık kullanılır. Bugün olasılığın ekonomi, meteoroloji, temel bilimler, milli savunma, vb. birçok uygulama alanı vardır.

Deney: Bir olayın sonucunun ne olacağını görmek için yapılan işleme deney denir.

Çıktı: Deneyin sonucunda elde edilebilecek sonuçlara çıktı denir.

Örnek Uzay: Bir deneyde elde edilebilecek tüm çıktıların kümesine Örnek uzay denir ve E ile gösterilir.

Örnek Nokta: Örnek uzayın herhangi bir elemanına örnek nokta denir.

Örnek:

Madeni bir paranın havaya atılması deneyinde, para yere düşmeden kesin olarak yazı mı, tura mı geleceğini bilemeyiz.

Bu deneyin çıktıları yazı veya turadır. Yazıyı Y, turayı T harfi ile gösterirsek, tüm çıktıların oluşturduğu küme örnek uzay olacağı için $E = \{Y, T\}$ olur. Yazı gelmesi ya da tura gelmesi ise bir olaydır.

İmkansız Olaylar: Gerçekleşmesi mümkün olmayan olaylar,

Bir zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayının 6 dan büyük olması gerçekleşmesi mümkün olmayan olaydır.

Kesin Olaylar: Gerçekleşmesi kesin olan olaylardır,

Sadece erkeklerin bulunduğu bir sınıftan seçilen öğrencinin erkek olma olayı kesin olaydır.

Eşit Olasılıklı Olaylar: Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze birden altıya kadar olan sayıların gelmesi eşit olasılıklı olaydır.

Bir madeni para atıldığında yazı ve tura gelme olasılığı birbirine eşittir.

Daha Fazla Olasılıklı Olaylar: 10 tane kız 5 tane erkek bulunan bir sınıftan seçilen öğrencinin kız olma olasılığı daha fazladır.

Daha Az Olasılıklı Olaylar : 40 tane kırmızı 2 tane mavi top bulunan bir torbadan seçilen topun mavi olma olasılığı daha azdır.