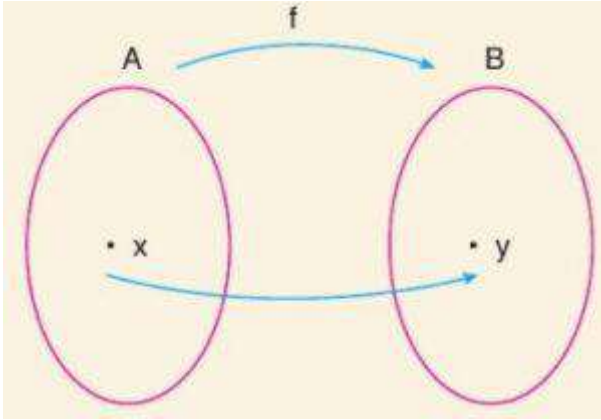


2. ÜNİTE : FONKSİYONLAR

Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi

Fonksiyon Kavramı

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için A'nın her bir elemanını B'nin bir tek elemanı ile eşleyen kurala A'dan B'ye fonksiyon denir ve genellikle f, g, h, veya F, G, H, sembolleriyle gösterilir.



Yukarıda Venn şemasıyla gösterimde $x \in A$ elemanın, $y \in B$ elemanına eşleyen kural f ile gösterilmiştir. Bunu

$f: A \rightarrow B$ biçiminde ifade ederiz ve B'deki y elemanı A'daki x elemanına f kuralı ile bağlıdır deriz. Yani

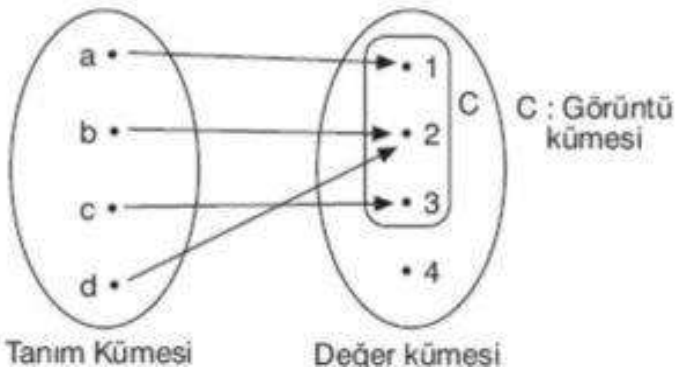
$f: A \rightarrow B$

$x \rightarrow y$

x'in f kuralı altındaki görüntüsü y'dir denir.

Bunu $f(x) = y$ şeklinde de gösteririz.

$f: A \rightarrow B$ gösteriminde A'ya fonksiyonun tanım kümesi B'ye fonksiyonun **değer kümesi** denir. Tanım kümesinin f kuralı altındaki görüntülerinin oluşturduğu $f(A)$ kümesine de **görüntü kümesi** denir.



Fonksiyon Türleri

Bire-bir Fonksiyon: Tanım kümesindeki farklı kişilerin yaşları da farklı olduğu görülmektedir.

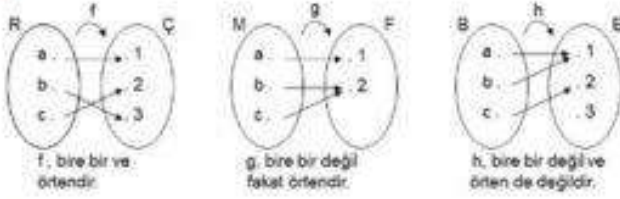
Genel olarak $f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. A tanım kümesindeki farklı iki elemanın eğer görüntüleri de farklı oluyorsa f'ye bire bir fonksiyon denir. Yani her $x_1, x_2 \in A$ için eğer $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa f'ye **bire bir (1 - 1) fonksiyon** denir.

Örten Fonksiyon: Değer kümesinde boşta eleman kalmıyorsa fonksiyon örten 'dir. Başka bir deyişle, görüntü kümesi değer kümesine eşit olan fonksiyonlar örtendir.

$f: A \rightarrow B$ 'ye

$f(x) = y$ ile tanımlı olan f örtlen $\Leftrightarrow f(A) = B$ dir.

Örnek:



SONUÇ

Örtlen fonksiyonun değer kümesinde eşleşmemiş eleman bulunmaz.

İçine Fonksiyon: Örtlen olmayan fonksiyona içine fonksiyon denir.

Bazı Özel Fonksiyonlar: Sabit, Doğrusal, Birim, Parçalı, Permütasyon

Sabit Fonksiyon: Tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde yalnızca bir elemanla eşleşen fonksiyonlara sabit fonksiyon denir. c bir gerçekte sayı olmak üzere sabit fonksiyonlar $f(x) = c$ biçiminde gösterilir.

Hatırlatma: $y = f(x) = c$ sabit fonksiyonunda x li terimler olmaz.

Birim Fonksiyon: Tanım kümesindeki her elemanı yine kendisine dönüştüren kurala birim fonksiyon denir ve $f(x) = x$ biçiminde gösterilir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ in grafiği çizilirken $y = x$ doğusunu çizmek yeterlidir.

Hatırlatma: $y = f(x) = x$ fonksiyonuna I. açortay doğrusu denir. $f(x) = x$ birim fonksiyonunda x li terim dışında hiçbir terim olmamalıdır.

Parçalı Fonksiyon:

Tanım kümesini parçalara ayırıp bunların her biri için farklı kurallar içeren fonksiyon parçalı bir fonksiyondur.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{eger } x < 0 \\ 3x - 4 & \text{eger } x \geq 0 \end{cases}$$

$x < 0$ ise görüntüsünü bulmak için $2x + 1$ i, değilse $3x - 4$ ü kullanmalıyız.

Permütasyon fonksiyon: Bir kümeden kendisine yazılan bire-bir ve örtlen fonksiyonlara permütasyon denir.

$f: A \rightarrow A$

$f =$ fonksiyonu permütasyon fonksiyon olup;

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

biçiminde gösterilir.

Doğrusal Fonksiyon: $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonlar doğrusaldır. Grafikleri kartezyen düzlemde bir doğru oluşturur. Doğrusal fonksiyonlar, bire-birlik özelliği incelenirken bir örneğini gördüğümüz gibi, $a \neq 0$ ise bire-birdir. Doğrunun ayırıcı özelliği eğim dir. Eğim, x li teki 1 br lik artışın y li yarattığı değişimdir.

Fonksiyonlarda Dört İşlem

A ile B ayrık iki küme olmak üzere,

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyo

$$f + g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f - g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$f \cdot g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g} : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$

Fonksiyonların Grafikleri

$f(x) = ax + b$ fonksiyonunun (Doğrusal fonksiyon) grafiği çizilirken $x = 0$ için y eksenini kestiği nokta, $y = 0$ için x eksenini kestiği nokta bulunur. Bu iki noktadan geçen bir doğru çizildiğinde grafik tamamlanır.

$$f(x) = 12 - 4x$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM:

$x = 0$ için

$$y = 12 - 4 \cdot 0$$

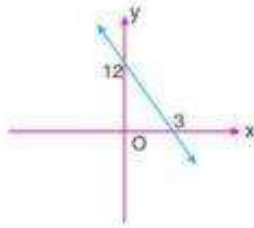
$y = 12$ olur.

$y = 0$ için

$$0 = 12 - 4x$$

$$4x = 12$$

$$x = 3 \text{ olur.}$$



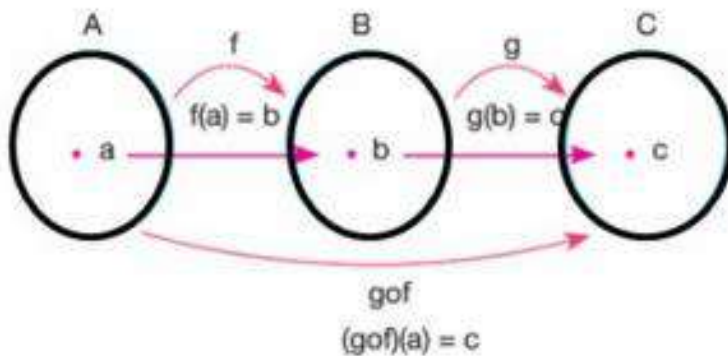
İki nokta eksenler üzerine işaretlenip birleştirilirse doğru grafiği çizilmiş olur.

İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersini

Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi

$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$

fonksiyonları için A kümesindeki her elemanı, C kümesindeki yalnız bir elemana eşleyen fonksiyona bileşke fonksiyon denir. Bu fonksiyon gof şeklinde gösterilir.



$gof : A \rightarrow C$

$x \rightarrow (gof)(x)$ olur.

Bir Fonksiyonun Tersi

- $f: A \rightarrow B$, bire bir ve örten fonksiyon ise,
 $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ tir. $f^{-1}: B \rightarrow A$, $y \rightarrow f^{-1}(y) = x$
fonksiyonuna **f nin ters fonksiyonu** denir.
- $f: A \rightarrow B$, bire bir ve örten fonksiyon; $I: A \rightarrow A$, birim
fonksiyon ise,
 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ dir.

