3. ÜNİTE : POLİNOMLAR

Polinom Kavramı ve Polinomlarla İşlemler

Bir Değişkenli Polinom Kavramı

Polinomun Tanımı

$a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere $P(x) = a_0+a_1.x+a_2.x^2+a_3.x^3+\ldots+a_n.x^n$ biçimindeki ifadelere x değişkenine göre düzenlenmiş reel katsayılı **polinom** (çok terimli) denir.
Burada $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ reel sayılarına polinomun katsayıları, $a_0, a_1.x, a_2.x^2, a_3.x^3,\ldots, a_n.x^n$ ifadelerine polinomun terimleri olarak adlandırılır.
$a_n.x^n$ terimindeki a_n sayısına terimin katsayısı, x'in kuvveti olan n sayısına terimin derecesi olarak adlandırılır.

Polinomun Derecesi, Katsayıları ve Sabit Terimi

Sabit Terim : Sabit terim, değişkene bağlı olmayan terimdir dolayısıyla değişkene bağlı olarak değeri değişemez ve sabit kalır.

$P(x)=x^3-7x+2$

olduğuna göre, $P(x+1)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

$P(x+1)$ polinomunun sabit terimi için $x=0$ yazılır.
$P(0+1)=P(1)$ değerini bulalım.
$P(x)=x^3-7x+2$
$P(1)=1^3-7.1+2$
$P(1)=1-7+2=-4$ buluruz.

Polinomun Kat Sayıları: Derecesi en büyük olan terimin katsayısı ise polinomun **baş katsayısı** olarak adlandırılır. Polinomlar katsayılarına göre isimlendirilir. Katsayılarımız reel sayı ise reel **katsayılı polinomlar**, rasyonel sayı ise rasyonel katsayılı polinomlar, tam sayı ise **tam katsayılı polinom** denir.
Örnek: $P(x) = 8x^3 - 3x^2 + 4x - 9$katsayıları nelerdir?
$8x^3, - 3x^2, 4x, - 9$ polinomun katsayılarıdır.

Polinomun Derecesi: Derecesi en büyük olan terimin derecesine polinomun derecesi denir ve der [P(x)] ile gösterilir.
Örnek: $P(x) = 8x^3 - 3x^2 + 4x - 9$ polinomunun derecesi nedir?
der [P(x)] = 3 polinomun derecesidir.

Polinomlarda Sabit Terim ve Katsayılar Toplamı

Sorular çözülürken sabit terim istendiğinde x yerine 0 yazılır.

P(x) polinomun sabit terimi ;P(0)dır.

Örnek: P(7x-3) polinomun sabit terimi kaçtır?
P(7x-3)=P(7.0-3)=P(-3)tür.

Tek dereceli terimlerin katsayılar toplamı aşağıdaki formülle bulunur:

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}$$

Sorular çözülürken katsayılar toplamı istendiğinde x yerine 1 yazılarak bulunur.

P(x) polinomun katsayılar toplamı; P(1) dir.

Örnek: P(5x+2) polinomun kat sayılar toplamı kaçtır?
P(5x+2)=P(5.1+2)=P(7) dir.

Sabit Polinom ve Sıfır Polinomu

x değişkeni bulundurmayan, c bir gerçek sayı olmak üzere P(x)=c polinomuna **sabit polinom** denir.
Örnek: P(x)=9, P(x)=163, P(x)=64…
Sıfır polinomu sabit polinomun özel halidir. P(x)=0 polinomuna **sıfır polinomu** denir. Sabit polinomun derecesi sıfırdır. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

İki Polinomun Eşitliği

Aynı dereceli terimlerinin katsayıları eşit olan polinomlar eşittir.

Örnek: $P(x) = ax^2 – (2b – 1)x^2 + 3x+4$
$Q(x) = 5x^2 -cx + 2d- 4$ polinomlarının eşit olması için a,b,c,d ne olmalıdır?
$ax^2 – (2b – 1)x^2 + 3x+4= 5x^2 -cx + 2d- 4$

-(2b-1)=5	3=-c	4=2d-4
-2b=4	c=-3	2d=8
b=-2		d=4

bulunur.

Polinomlarla Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme İşlemleri

Polinomlarla Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Polinomlarla Toplama: İki polinom toplanırken; dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları kendi aralarında toplanır, o terimin kat sayısı olarak yazılır.
xn + b. xn = (a + b). xn
xn + b.xn = (1+b) . xn
Polinomlarda Çıkarma: Polinomlarda çıkarma işlemi yapılırken dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları kendi aralarında çıkarılır.

Polinomlarla Çarpma İşlemi

İki polinom çarpılırken birinci polinomun her terimi, ikinci polinomun her terimi ile ayrı ayrı çarpılır ve bu çarpımdan elde edilen terimler toplanır.

Örnek:

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= x^2+2 \\ Q(x) &= x^3-2x+3 \end{aligned}\right\} \quad P(x).Q(x)=?$$

Çözüm:

$$P(x).Q(x) = (x^2+2)(x^3-2x+3)$$
$$= x^5 - \cancel{2x^3} + 3x^2 + \cancel{2x^3} - 4x + 6$$
$$= x^5 + 3x^2 - 4x + 6 \quad \text{buluruz.}$$

Polinomlarla Bölme İşlemi ve Kalan Bulma

P(x) ve Q(x) polinomları verilsin. $Q(x) \neq 0$ olmak üzere, P(x) polinomunun Q(x) polinomuna bölümü

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} - \quad & B(x) \\ \cline{1-1} K(x) & \end{array}$$

P(x) : Bölünen
Q(x) : Bölen
B(x) : Bölüm
K(x) : Kalan

Olmak üzere bölme işleminde

$P(x)$ polinomu için,

$P(x^4) = ax^8 + (b+1)x^5 + (a.b)x^4 + (a-1)x^2 + 2b - 2$

olduğuna göre, $P(x^3 - 1)$ polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x^4) = ax^8 + (b+1)x^5 + (a.b)x^4 + (a-1)x^2 + 2b - 2$

$P(x^3 - 1)$ polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalanı bulmak için;

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ dir.

$P((-1)^3 - 1) = P(-2)$ bulunmalı.

$x^4 = 2$ yazalım.

$P(x^4) = a(x^4)^2 + (b+1)x^4.x + (a-1).x^2 + 2b - 2$

$\Rightarrow a.(2)^2 + (b+1).2.x + (a-1)x^2 + 2b - 2$

Polinomlarda Derece

der[P(x)]=m , der[Q(x)]=n olmak üzere;

$P(x)$ polinomu için,

$P(x^4) = ax^8 + (b+1)x^5 + (a.b)x^4 + (a-1)x^2 + 2b - 2$

olduğuna göre, $P(x^3 - 1)$ polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

$P(x^4) = ax^8 + (b+1)x^5 + (a.b)x^4 + (a-1)x^2 + 2b - 2$

$P(x^3 - 1)$ polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalanı bulmak için;

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ dir.

$P((-1)^3 - 1) = P(-2)$ bulunmalı.

$x^4 = 2$ yazalım.

$P(x^4) = a(x^4)^2 + (b+1)x^4.x + (a-1).x^2 + 2b - 2$

$\Rightarrow a.(2)^2 + (b+1).2.x + (a-1)x^2 + 2b - 2$

Polinomların Çarpanlara Ayrılması

Bir Polinomu Çarpanlarına Ayırma

*P(x) = Q(x) .R(x) ise Q(x) ve R(x) polinomlarına P(x) polinomunun **çarpanları** denir.
*Bir polinomu iki ya da daha çok polinomun çarpımı biçiminde yazma işlemine bu polinomu **çarpanlarına ayırma işlemi** denir.
*En az birinci dereceden iki polinomun çarpımı biçiminde yazılamayan ve sabit olmayan polinomlara **indirgenmeyen polinom** denir.
*Başkatsayısı 1 olan ve indirgenmeyen polinomlara **asal polinom** denir.
→ $P(x) = x^2 + 1$, $Q(x) = 5x$, $R(x) = 3x + 2$ indirgenemeyen polinomlardır.
→ $P(x) = x + 4$, $Q(x) = x – 1$, $R(x) = x – 3$ asal polinomlardır.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

Ortak çarpan Parantezine Alma: Bir polinomun ya da bir cebirsel ifadenin terimlerinde ortak çarpanlar varsa ortak çarpanların en küçük üstlerinin çarpımı, bu polinomun her teriminin ortak çarpanıdır.
Örnek: 3x+3y ifadesinde 3'ler ortaktır bu nedenle ifadeyi 3 parantezine alırız:
3.(x+y)=3x+3y
Gruplandırılarak Çarpanlara Ayırma: Verilen ifadenin her teriminde ortak çarpan yoksa ortak çarpanı olan terimler kendi aralarında gruplandırılarak ortak çarpan parantezine alınır.
Örnek: ax+ay+bx+by=a.(x+y)+b.(x+y)= (x+y).(a+b)
ax+ay+bx+by ifadesinde a'ların, b'lerin, x'lerin veya y'lerin ortaklığı kullanılarak paranteze alınabilir.
Tam Kare Özdeşliği:

$(a+b)2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)2=a^2-2ab+b^2$

İki Kare Farkı Özdeşliği: İki terimin toplam ve farkının çarpımı ile elde edilen ifade, iki kare farkıdır.

$x^2 - y^2 = (x - y).(x + y)$ ile gösterilir.

İki Küp Farkı ve Toplamı:

x3+y3=(x+y).(x2-xy+y2)
x3-y3=(x-y). (x2+xy+y2)

Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi

P(x) ve Q(x) gerçek katsayılı iki polinom ve Q(x)≠0

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki ifadelere rasyonel ifade denir.

$\frac{3x+1}{x}$, $\frac{x^2-4}{x+2}$, $\frac{x^5+x}{x-1}$ ifadeleri rasyonel ifadelerdir.

$\sqrt{x^2+8}$, $\frac{\sqrt{x^2+8}}{x}$ ifadesi rasyonel ifade değildir.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesini sadeleştirmek için P(x) ve Q(x) polinomları çarpanlara ayrılır. Pay ve payda da bulunan ortak çarpanlar sadeleştirilir.