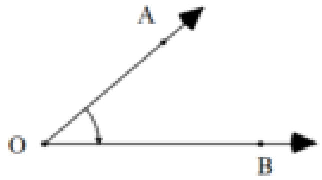
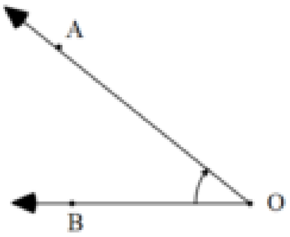
11. SINIF MATEMATİK DERS NOTLARI

1. ÜNİTE : TRİGONOMETRİ

Yönlü Açılar

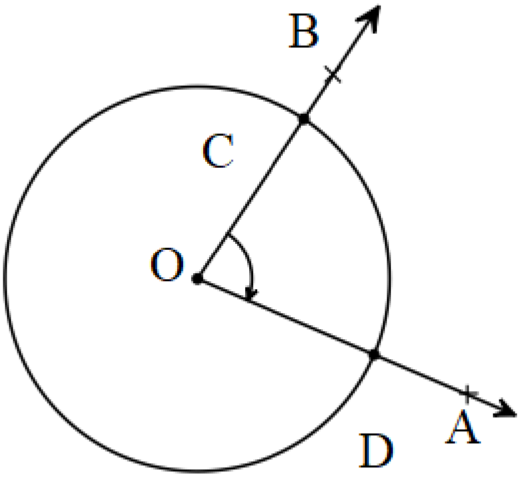
Bir açının iki tane kenarı vardır. Bunlardan birisi başlangıç diğeri ise bitim kenarıdır. Başlangıç ve bitim kenarına göre açının yönü değişir.





Saatin dönme yönünün tersi olan yöne **pozitif yön**, aynı olan yöne **negatif yön** denir.

Merkez Açı nedir?



İki yarıçapın oluşturduğu açıya **merkez açı** denir. Merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

Açı Ölçü Birimleri

Açının kenarları arasındaki açıklığa açı denir ve bir açının büyüklüğünü ve küçüklüğünü ifade etmek için bazı açı ölçü birimlerini kullanırız. Yaygın olarak kullandığımız açı ölçme birimleri **derece** ve **radyan**dır.

Derece: Çember yayının 360 eşit yay parçasına bölenmesiyle elde edilen parçalardan her birini gören merkez açının ölçüsü 1 derece dir.

– Tam çember yayının ölçüsü 360° dir.

– 1 derece 60 dakikaya eşittir. $1° = 60'$

– 1 dakika 60 saniyeye eşittir. $1' = 60''$

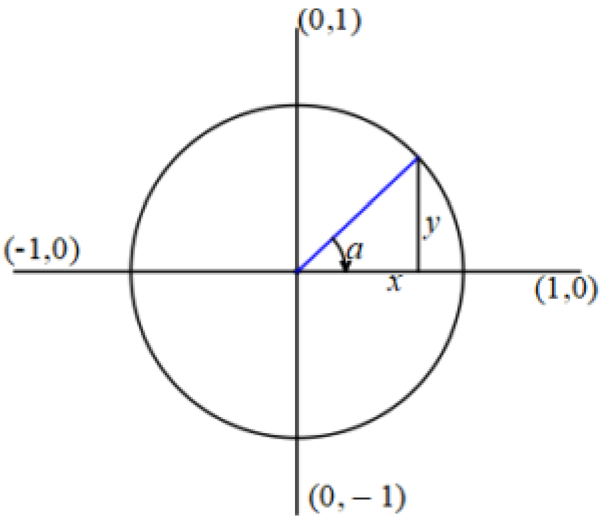
Grad: Dairenin 400 eşit parçaya bölünmüş yaylarından birine 1 grad denir. Buna göre bir dairenin tüm yaylarının ölçüsü 400 graddır.

Radyan: Bir dairede, yarı çapı uzunluğundaki bir yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 radyan denir. 1 radyan 57.2957795 derecedir.

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

$$\frac{D}{360°} = \frac{R}{2\pi} \rightarrow \frac{D}{180°} = \frac{R}{\pi}$$

Birim Çember: Birim Çember, yarıçapı 1 cm, merkezi orijin (0,0) olan çembere verilen isimdir.

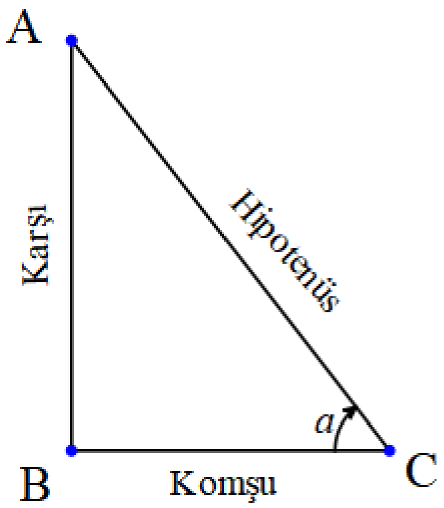


cosα → Açı α dereceyken mavi doğru parçasının çemberi kestiği noktanın x değeridir.

sinα → Açı α dereceyken mavi doğru parçasının çemberi kestiği noktanın y değeridir.

Esas Ölçü: Esas ölçü, açının 0° ile 360° arasındaki ölçüsüne denir.
-180° = π
-90° = π/2
-360° = 2π
360°'den büyük açının esas ölçüsünü bulma: Verilen sayıyı 360'a böleriz, kalan sayı bize esas ölçüyü verecektir.
0°'den küçük açının esas ölçüsünü bulma: Verilen sayı işareti önemsenmeden yine 360'a bölünür ve kalan sayı 360'tan çıkarılır.
π cinsinden verilen açının esas ölçüsünü bulma: Sayının yaklaşık değerini bulup içerisinden 2π ve katlarını(4π,6π,8π…) çıkaracağız.
π cinsinden negatif verilen açıların esas ölçüsünü bulma: Sayının yaklaşık değeri bulup sayıyı en küçük pozitif yapacak 2π ve katlarını (4π,6π,8π…) sayıya ekleriz.

Trigonometrik Fonksiyonlar



$$\sin\alpha = \frac{KARŞI}{HİPOTENÜS} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

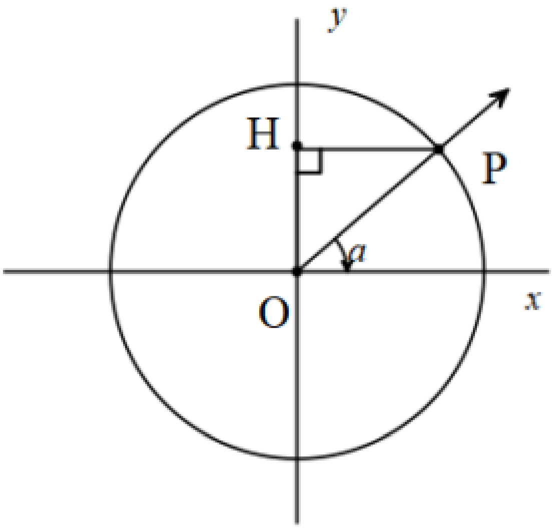
$$\cos\alpha = \frac{KOMŞU}{HİPOTENÜS} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{KARŞI}{KOMŞU} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{KOMŞU}{KARŞI} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

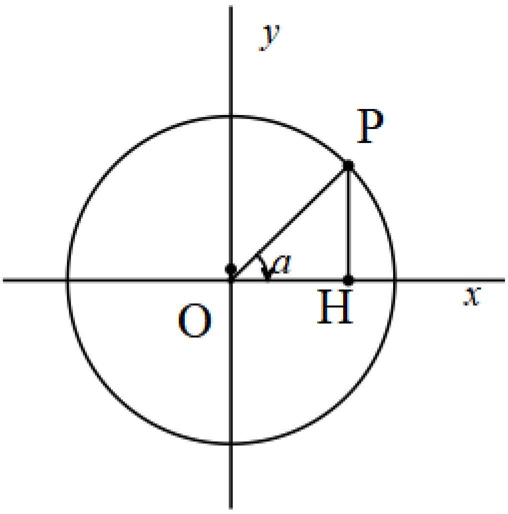
Sinüs Fonksiyonu



a açısının bitim kenarının birim çemberi kestiği P noktasının koordinatları (x,y) olmak üzere P noktasının ordinatına ***a* açının sinüsü** denir.
y=sin*a* şeklinde gösterilir. *a* açısını sin*a* yapan fonksiyona **sinüs fonksiyonu** denir.

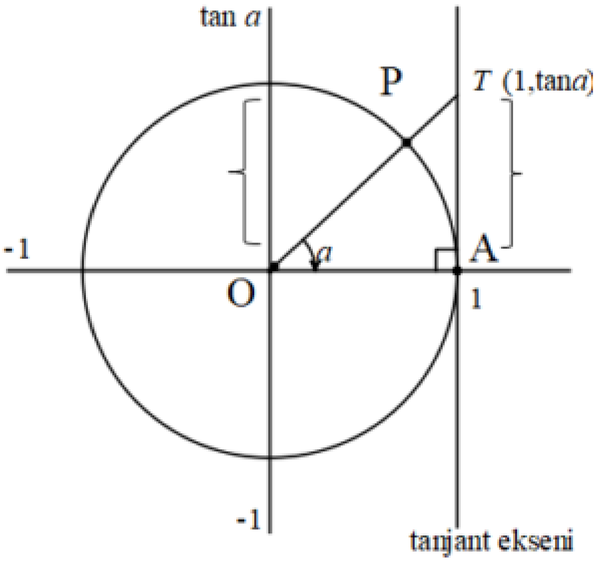
$\sin\alpha = \frac{KARŞI}{HİPOTENÜS}$ formülü ile bulunur.

Kosinüs Fonksiyonu



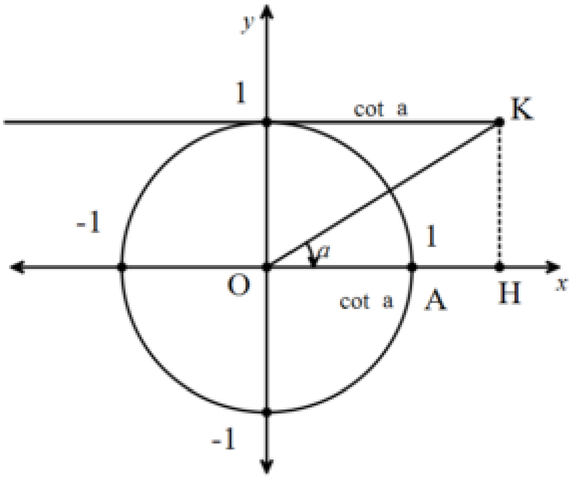
a açısının bitim kenarının birim çemberi kestiği P noktasının koordinatları (x,y) olmak üzere P noktasının apsisine ***a* açının kosinüsü** denir.
x=cos*a* şeklinde gösterilir. *a* açısını cos*a* yapan fonksiyona **kosinüs fonksiyonu** denir.

Tanjant Fonksiyonu



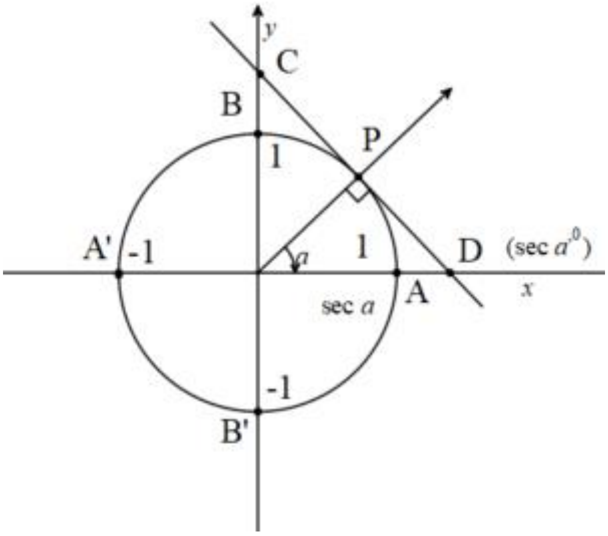
Bir *a* açısının bitim kolunun x=1 doğrusu ile kesiştiği T noktasının ordinatına *a* açısının **tanjantı** denir. tan*a ile gösterilir.*
a reel sayısını tana ile eşleştiren fonksiyona **tanjant fonksiyonu** denir.
$a = \frac{\pi}{2}\ veya\ a = \frac{3\pi}{2}$ olduğunda a'nın bitim kolu tanjant eksenine (x=1 doğrusuna) paralel olacağından $tan = \frac{\pi}{2}\ ve\ tan = \frac{3\pi}{2}$ tanımsızdır.

Kotanjant Fonksiyonu



Bir *a* açısının bitim kolunun Y=1 doğrusu ile kesiştiği T noktasının ordinatına *a* açısının kotanjantı denir. cot*a ile gösterilir.*
a reel sayısını cot*a* ile eşleştiren fonksiyona **kotanjant fonksiyonu** denir.
a=0º,*a*=180º*a*=360º için açının bitim kolu Y=1 doğrusuna paralel olduğundan kesişmezler. O yüzden cot 0º,cot πº,cot 2πº tanımsızdır.

Sekant Fonksiyonu



a açısının çemberi kestiği P noktasından çizilen teğetin x eksenini kestiği D noktasının apsisine *a* açısının sekantı denir ve sec *a* ile gösterilir. a=90º ve a=270º için teğet ler x eksenine paralel olduğundan x eksenini kesmezler o yüzden sec90º ve sec270º tanımsızdır.

Trigonometrik Özdeşlikler

$\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{Cos}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\mathrm{Cos}\alpha$

$\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{Sin}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{Sin}\alpha$

$\mathrm{Tan}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{Cot}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Tan}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{Cot}\alpha$

$\mathrm{Cot}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{Tan}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Cot}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{Tan}\alpha$

$\mathrm{Sin}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\mathrm{Cos}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Sin}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{Cos}\alpha$

$\mathrm{Cos}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\mathrm{Sin}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Cos}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\mathrm{Sin}\alpha$

$\mathrm{Tan}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{Cot}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Tan}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{Cot}\alpha$

$\mathrm{Cot}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{Tan}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Cot}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{Tan}\alpha$

$\mathrm{Sin}(\pi-\alpha)=\mathrm{Sin}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Sin}(\pi+\alpha)=-\mathrm{Sin}\alpha$

$\mathrm{Cos}(\pi-\alpha)=-\mathrm{Cos}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Cos}(\pi+\alpha)=-\mathrm{Cos}\alpha$

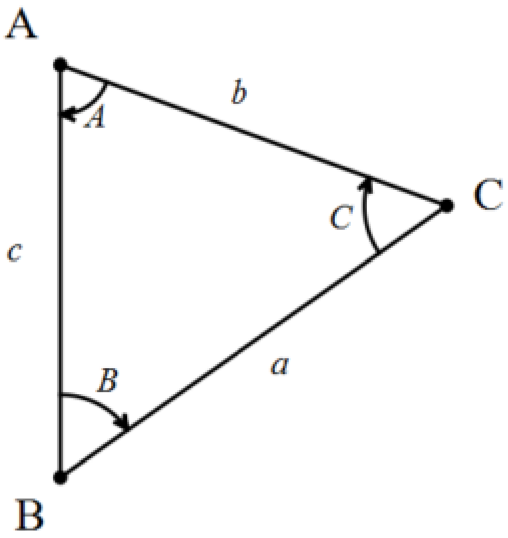
$\mathrm{Tan}(\pi-\alpha)=-\mathrm{Tan}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Tan}(\pi+\alpha)=\mathrm{Tan}\alpha$

$\mathrm{Cot}(\pi-\alpha)=-\mathrm{Cot}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{Cot}(\pi+\alpha)=\mathrm{Cot}\alpha$

$\mathrm{Sin}(2\pi-\alpha)=\mathrm{Sin}(-\alpha)=-\mathrm{Sin}\alpha$

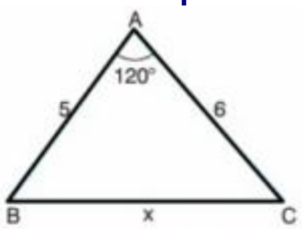
Kosinüs Teoremi ve Sinüs Teoremi

Kosinüs Teoremi



$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A^{\circ}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B^{\circ}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C^{\circ}$

Kosinüs Teoreminin İspatı



Yukarıdaki ABC üçgeninde
$|AB| = 5$ cm
$|AC| = 6$ cm
ve
$m(\widehat{BAC}) = 120°$
olmak üzere $|BC| = x$ kenarının uzunluğunu bulalım.

ABC üçgeninin A köşesindeki 120° lik açının dış açısı 60° olacağından C köşesinden [AB] kenarının uzantısına bir dikme çekilirse oluşan özel üçgenden $|AH| = 3$ cm ve

Çözüm

$|CH| = 3\sqrt{3}$ cm bulunur.

$x^2 = 8^2 + (3\sqrt{3})^2$

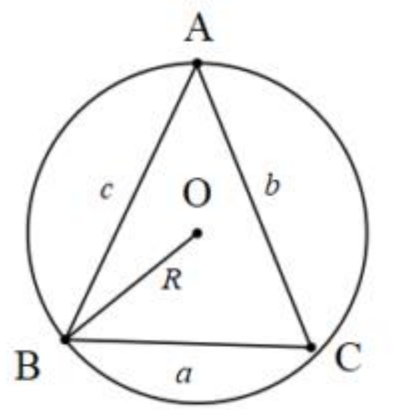
$x^2 = 64 + 27$

$x^2 = 91$

$x = \sqrt{91}$ elde edilir.

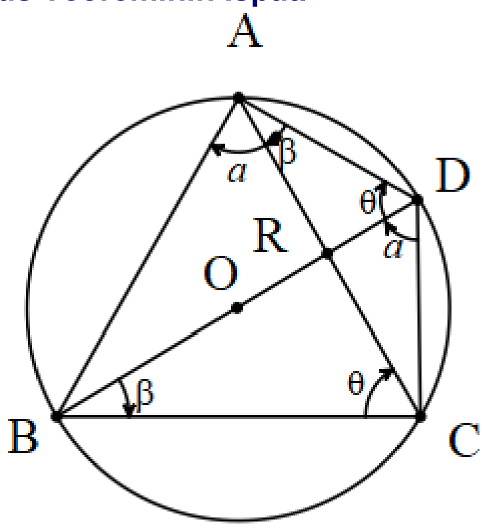
Sinüs Teoremi

ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O ve yarıçapı R olmak üzere;



$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{b}{\sin\widehat{C}} = 2R$$

Sinüs Teoreminin İspatı



ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı olan [BO] kenarını doğrultusunu bozmadan uzatalım. Çemberi kestiği noktaya D diyelim [BD] çemberinin çapı olur A köşes ile D noktasını birleştirelim. BAD açısı 90º olur.

a+β=90º
Aynı yayı gören çevre açıları eşittir.

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC})$$
$$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ACB})$$
$$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{DBC})$$ dir.

DBC üçgeninde a açısının sinüs değerine bakılırsa

$$\sin a = \frac{|BC|}{2R}$$

Trigonometrik Fonksiyonların Periyotları

Periyot: Bir fonksiyonun tanım kğmesindeki bir x sayısı için f(x+T)=f(x) olarak sıfırdan farklı en az bir T sayısı varsa bu T sayısına f fonksiyonunun periyodu denir.

f(x-T)=f(x) eşitliğini sağlayan birden fazla T€R varsa bunların içindeki en küçük pozitif T sayısına f fonksiyonun esas periyodu denir.

İki fonksiyonun toplamının periyodu f'nin periyodu T_f g'nin periyodu T_g ise f+g'nin periyodu Okek(T_f,T_g) olur.

Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlarının Periyodu

a,b,c,d € R a≠0 m € Z^+ olmak üzere f(x)=c+dsin^m (ax+b)ve g(x)=c+dcos^m (ax+b) fonksiyonlarının periyodu (esas periyodu),

$$T=\begin{cases} \frac{2\pi}{a}, & \text{m tek ise} \\ \frac{\pi}{a}, & \text{m çift ise} \end{cases}$$

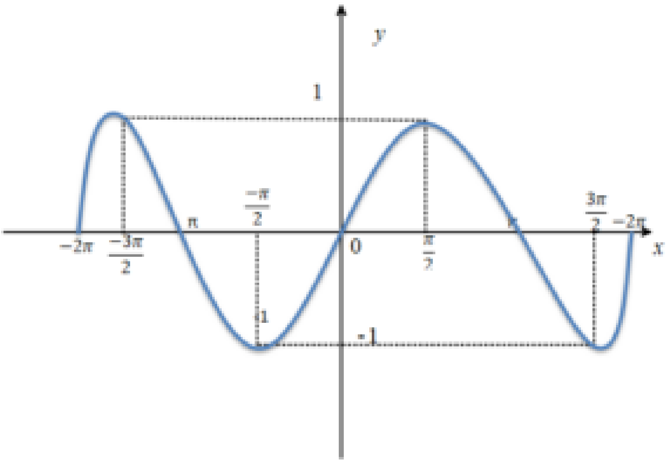
Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonlarının Periyodu

a,b,c,d € R , a≠0 m € Z^+ olmak üzere f(x)=c+dtan^m (ax+b) ve g(x)=c +dcot^m(ax+b) fonksiyonlarının (esas) periyodu

$$T= \frac{2\pi}{a}, \text{ dır.}$$

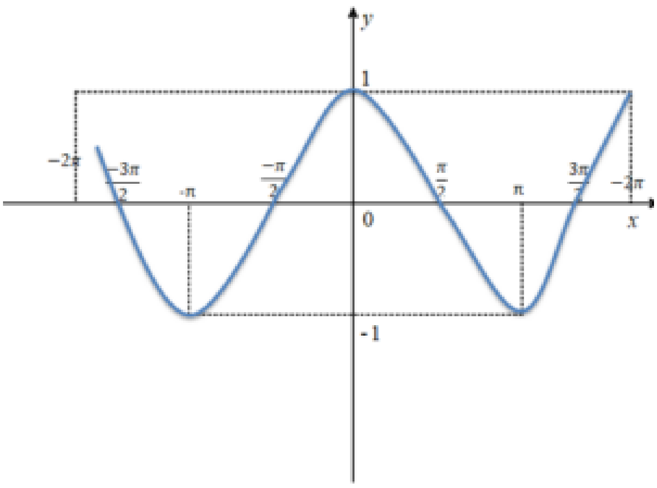
Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

sinx Fonksiyonunun Grafiği



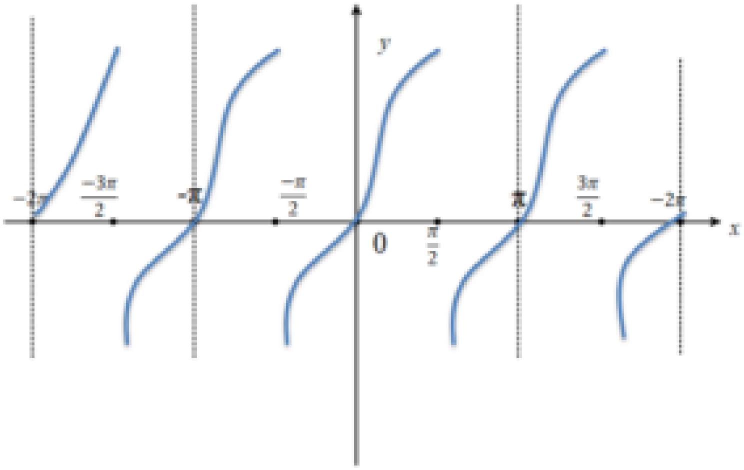
sinx fonksiyonun [-2π,2π] aralığında grafiği yukarıdaki gibidir.

cosx Fonksiyonunun Grafiği



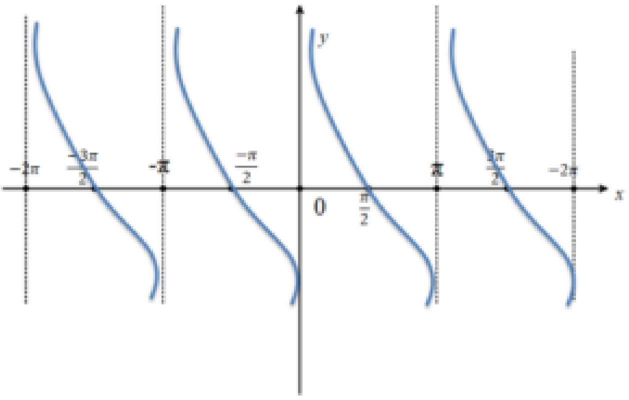
cosx fonksiyonun [-2π,2π] aralığında grafiği yukarıdaki gibidir.

tanx Fonksiyonunun Grafiği



tanx fonksiyonun [-2π,2π] aralığında grafiği yukarıdaki gibidir.

cotx Fonksiyonunun Grafiği



cotx fonksiyonun [-2π,2π] aralığında grafiği yukarıdaki gibidir.

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Arcsin Fonksiyonu

$f:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1], f(x) = sinx$ birebir ve örten fonksiyon olduğundan

$f^{-1}:[-1,1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonuna sinüs fonksiyonunun tersi fonksiyonu denir.

f^{-1}(x)= $\sin^{-1}$x=arcsinx ile gösterilir.

Sinx=y ⇔ arcsiny=x olur.

Arccos Fonksiyonu

$f:[0,\pi] \rightarrow [-1,1], f(x) = cosx$ birebir ve örten fonksiyon olduğundan

$f^{-1}:[-1,1] \rightarrow [0,\pi]$ fonksiyonuna kosinüs fonksiyonunun tersi fonksiyonu denir.

f^{-1}(x)= $\cos^{-1}$x=arccosx ile gösterilir.

Cosx=y ⇔ arccosy=x olur.

Arctan Fonksiyonu

$f:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow R, f(x)=tanx$ birebir ve örten fonksiyon olduğundan

$f^{-1}:R\rightarrow\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonuna tanjant fonksiyonunun tersi fonksiyonu denir.

f^{-1}(x)= $\tan^{-1}$x=arctanx ile gösterilir.

Tanx=y ⇔ arctany=x olur.

Arccot Fonksiyonu

$f:(0,\pi)\rightarrow R, f(x)=cotx$ birebir ve örten fonksiyon olduğundan

$f^{-1}:R\rightarrow(0,\pi)$ fonksiyonuna kotanjant fonksiyonunun tersi fonksiyonu denir.

f^{-1}(x)= $\cot^{-1}$x=arccotx ile gösterilir.

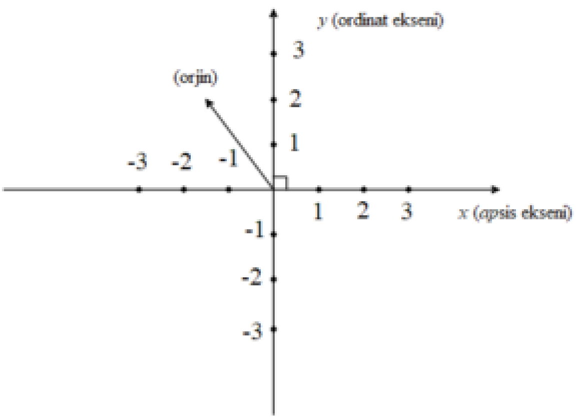
Cotx=y ⇔ arccoty=x olur.

2. ÜNİTE : ANALİTİK GEOMETRİ

Analitik Geometri Hazırlık

Analitik Düzlem ve Dik Koordinat Sistemi

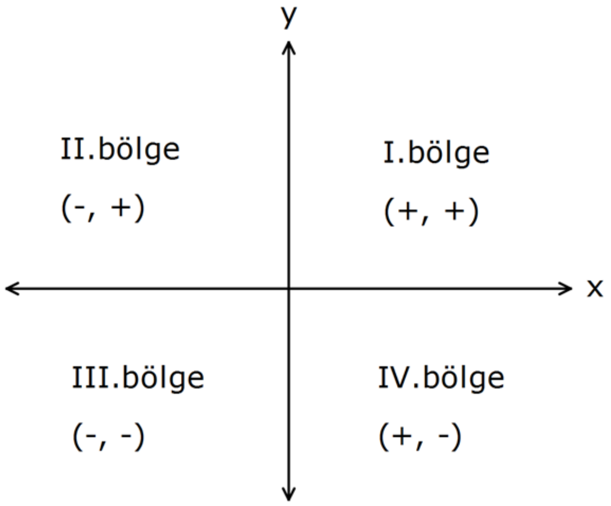
Dik kesişen iki sayı doğrusunun yerleştirildiği düzleme **analitik düzlem** denir.
Analitik düzlemde dik kesişen iki sayı doğrusunun oluşturduğu siteme **dik koordinat sistemi** denir.



Yatay eksen olan x eksenine **apsis ekseni**, dikey olan y ekseni de **ordinat ekseni** denir.
x (apsis) ve y (ordinat) eksenlerinin kesiştiği noktaya **orjin** (Başlangıç Noktası) denir.
Koordinatları P(a, b) olan bir P noktasının apsisi a, ordinatı da b dir.

x ekseni üzerindeki noktaların koordinatları (a, 0), y ekseni üzerindeki noktaların koordinatları da (0, b) şeklindedir. Yani x ekseni üzerindeki noktanın ordinatı sıfır, y ekseni üzerindeki noktanın da apsisi sıfırdır.

Analitik Düzlemde Bölgeler

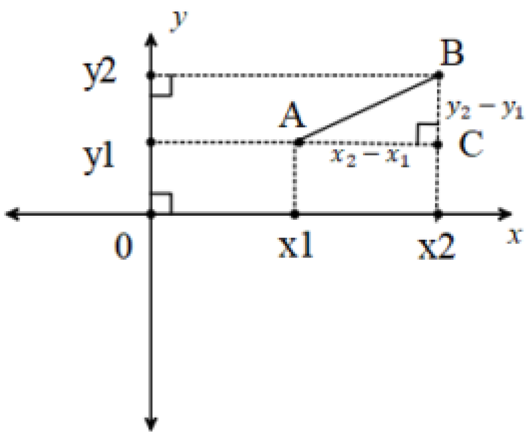


Koordinat sistemini oluşturan ve dik kesişen x ve y eksenleri analitik düzlem üzerinde 4 bölge meydana getirirler. Bu bölgeler saat yönünün tersine doğru 1. bölge, 2. bölge, 3. bölge ve 4. bölge olarak adlandırılırlar.

Şekilde de verildiği gibi bileşenleri A(x, y) olan bir nokta,

*****x ve y pozitif ise 1. bölgede,
*****x negatif ve y pozitif ise 2. bölgede,
*****x ve y her ikisi de negatif ise 3. bölge,
*****x pozitif ve y negatif ise 4. bölgededir.

İki Nokta Arasındaki Uzaklık

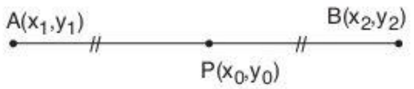


dik koordinat sisteminde a(x_1,y_1) ve B(x_2,y_2) noktaları arasındaki uzaklık ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanarak hesaplanabilir.
|AC|=(x_2,x_1) birim
|BC|=(y_2,y_1) birim olduğundan

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ dir.}$$

Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Bölen Noktanın Koordinatları

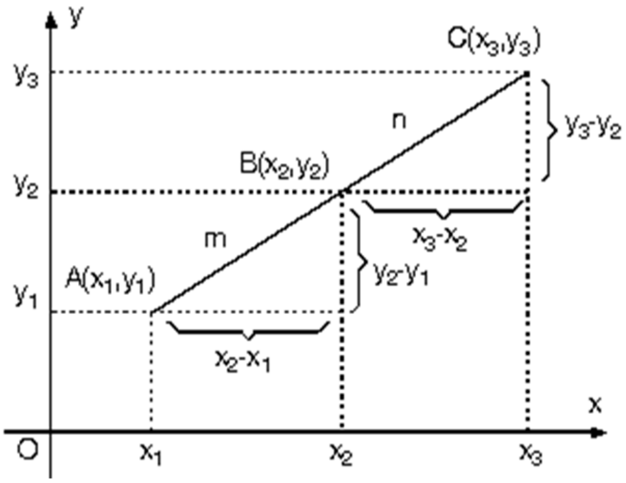
Bir Doğru Parçasının Orta Noktası



[AB] doğru parçasının orta noktası $P(x_0, y_0)$ olsun.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{dir.}$$

Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Bölen Noktanın Koordinatları



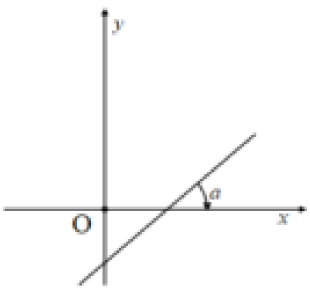
Analitik düzlemde, herhangi bir doğru parçasını belli oranda bölen noktanın koordinatları, verilen oranlar ile apsisler farkı ve ordinatlar farkı arasında benzerlikten kaynaklanan oranların eşitliği kaynaklanarak bulunur.

$$A(x_1, y_1)$$
$$B(x_2, y_2)$$
$$C(x_3, y_3) \; noktaları \; için$$
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{m}{n} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \; eşitliği \; verilir.$$

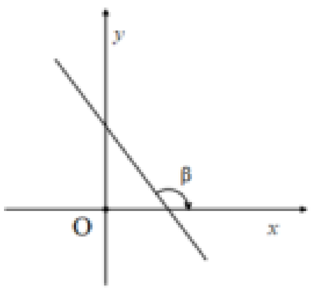
Analitik Düzlemde Doğrular

Doğrunun Eğimi ve Doğru Denklemleri

Bir Doğrunun Eğim Açısı ve Eğimi



Eğim Pozitif

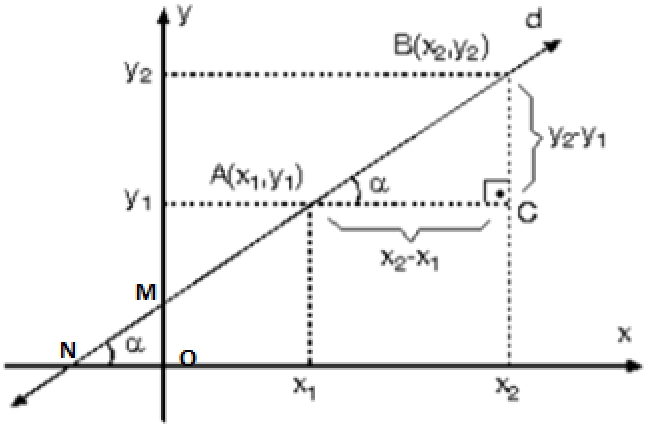


Eğim Negatif

Bir doğrunun -x ekseni ile pozitif yönde (saat yönünün tersi) yaptığı açıya **eğim açısı** denir.

Eğim açısının tanjantı, o doğrunun **eğimini** verir.
tanα > 0 eğim sıfırdan büyük
tanβ > 0 eğim sıfırdan küçük

İki Noktası Bilinen Doğrunun Eğimi



Analitik düzlemde d doğrusunun

$Eğim\ açısı; m = \tan\alpha\ \ dır.$

ABC üçgeni ile NMO üçgeninde

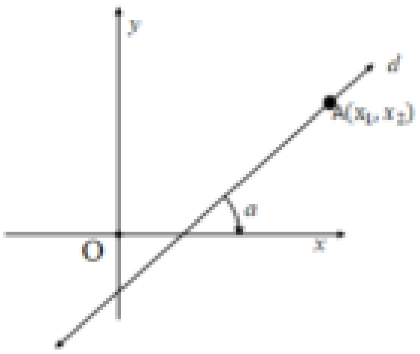
$m(\widehat{MNO}) = m(\widehat{BAC}) = \alpha\ dır.\ (yöndeş\ açılar)$

ABC üçgeninde

$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olduğundan $eğim = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dir.

Doğru Denklemleri

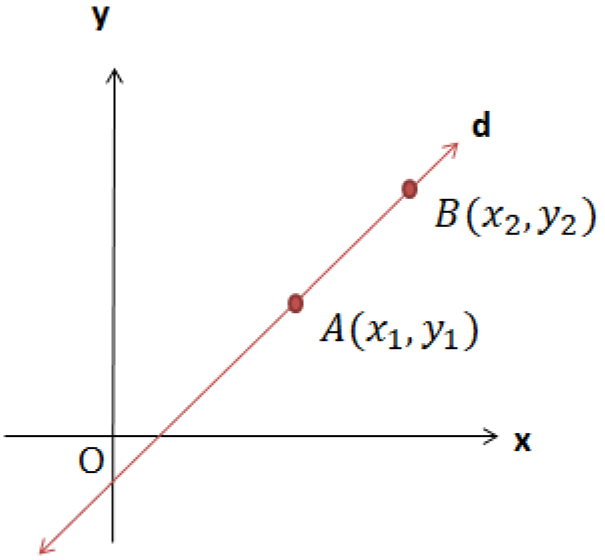
1. <u>Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğru Denklemi</u>



$A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan d doğrusunun üzerinde herhangi bir nokta P(x,y) ise d doğrusunun denklemi

$y - y_1 = m(x - x_1)$ olur.

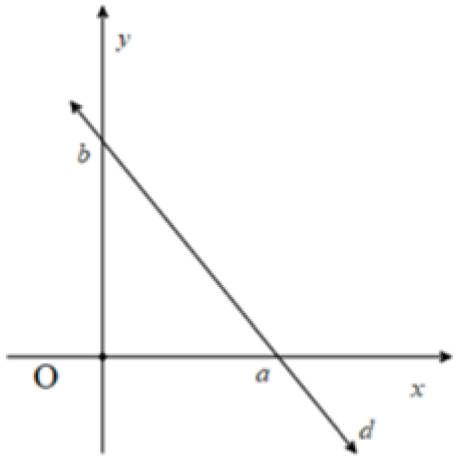
2. İki Noktası Bilinen Doğrunun Denklemi



İki noktası bilinen doğrunun denklemini yazmak için;

İki noktadan geçen doğrunun eğimi bulunur.
Bulunan eğim ve verilen noktalardan herhangi biri kullanılarak doğru denklemi yazılır.

3. Eksenleri Kestiği Noktaları Bilinen Doğrunun Denklemi

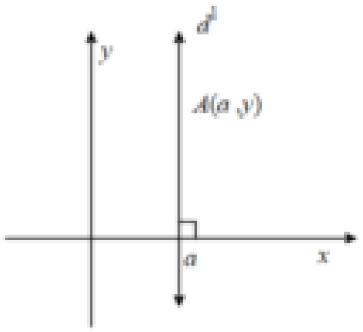


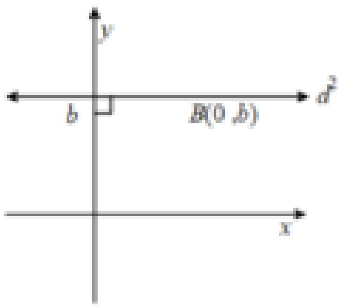
X eksenini kestiği nokta a
y eksenini kestiği nokta b ise

Denklem $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$

Doğru (a, 0) ve (0, b) noktalarından geçtiğine göre, doğrunun denklemi iki noktadan geçen doğru denklemi özelliği kullanılarak da yazılabilir.

4. Eksenlere Paralel Doğruların Denklemi





(y eksenine paralel doğruların eğim açısı=90°) (x eksenine paralel doğruların eğim açısı =0°)

d_1 : x=a doğrusu d_2 : y=b doğrusu

5. Orjinden Geçen Doğru Denklemi

Orijinden yani O(0,0) noktasından geçen doğrularda x = 0 için y = 0 olacağından

y = mx + n denklemindeki n terimi sıfır olur.

O halde orijinden geçen doğrunun eğimi m ise denklemi

y=mx

Doğru denklemi ax + by = 0 olur. Doğru denklemi ax + by + c = 0 şeklinde ise ve orijinden geçiyorsa c = 0 dır.

Doğru denklemi ax + by = 0 olur.

Denklemi Verilen Doğrunun Grafiği

ax + by + c = 0 denkleminde

$a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $c \neq 0$ olduğunda

x = 0 için y eksenini: $A\left(0, -\frac{c}{b}\right)$

y = 0 için x eksenini: $B\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$

kestiği noktalar analitik düzlemde belirtilerek bu noktalar birleştirildiğinde doğru grafiği çizilmiş olur.

ax + by + c = 0 denkleminde

$a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $c = 0$ olduğunda

denklem ax + by = 0 veya $y = -\frac{a}{b}x$ olur.

Bu tür denklemler orijinden geçer orijin dışında denklemi sağlayan herhangi bir nokta ile orijin birleştirilerek grafik çizilir.

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı ve Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

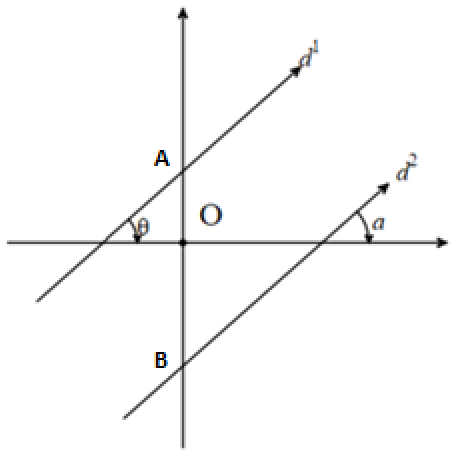
Paralel Doğrular

d_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (eğim açısı θ)

d_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (eğim açısı α)

$$\left(d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ dir.} \quad m_1 = m_2 \right)$$

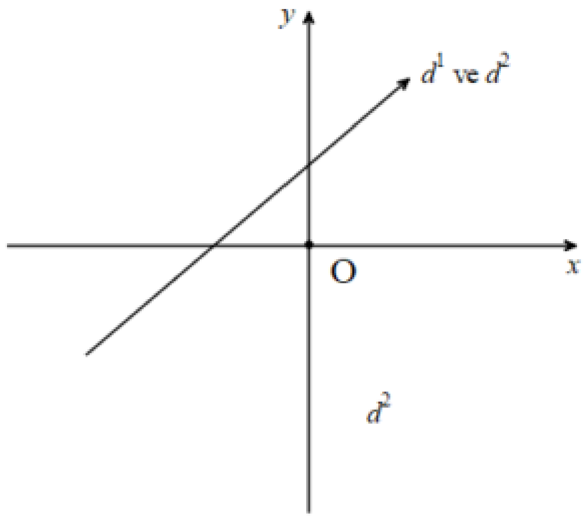
$$\alpha = \theta$$



Verilen denklemlere göre paralel doğrular arasındaki uzaklık

$$|AB| = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ bağıntısı ile bulunur.

Dik Doğrular



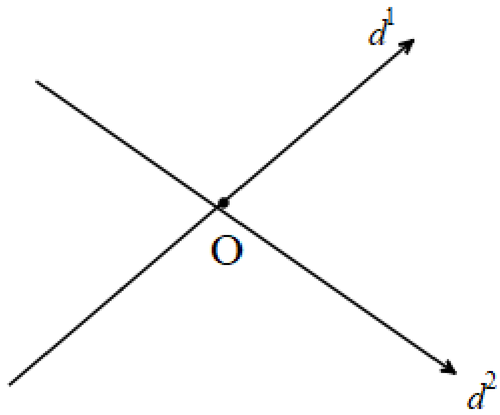
$\left.\begin{array}{l} d_1 \text{ in eğimi } \tan\alpha \\ d_2 \text{ in eğimi } \tan\theta \end{array}\right\} \theta = 90 + \alpha$

$\tan\theta = \tan(90 + \alpha) = -\cot\alpha$

$\tan\alpha \cdot \tan\theta = \tan\alpha \cdot (-\cot\alpha) = -\tan\alpha \cdot \cot\alpha = -1$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Kesişen Doğrular



$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ veya eğimler eşit değilse

d_1 ve d_2 doğruları P gibi bir noktada kesişir.

3. ÜNİTE : FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

İkinci Dereceden Fonksiyonların Grafikleri (Parabol)

a, b, c, ∈ R ve a ≠ 0 olmak üzere;
$y = ax^2 + bx + c$
biçiminde tanımlanan fonksiyonlara, **ikinci dereceden fonksiyonlar** denir. x değişkeni R (gerçek sayılar kümesi) den seçilirse, R den R ye bir ikinci derece fonksiyonu elde edilir.
Fonksiyonun analitik düzlemdeki grafiği olan eğriye **parabol** denir.
parabolü analitik düzlemde gösterebilmek (çizebilmek) için yapılması gereken işlemleri aşağıdaki
gibi sıralayabiliriz.

* Tepe noktasının koordinatları bulunur.
* Grafiğin varsa, koordinat eksenlerini kestiği noktalar bulunur.
* Değişim tablosu düzenlenir.
* Değişim tablosundan yararlanarak, belirlenen noktalar analitik düzlemde işaretlenir ve grafik çizilir.

Örnek

$y = 2x^2 + 8$ parabolünün varsa, eksenleri kestiği noktaları bulalım.
x = 0 için, $y = 2.0^2 + 8 = 8$ olduğundan, y eksenini kestiği nokta (0. 8) dir.
y = 0 için, $0 = 2x^2 + 8 \Rightarrow 2x^2 = -8 \Rightarrow x^2 = -4$ gerçek kök yoktur.
O halde, parabolün x eksenini kestiği noktası yoktur.

Parabolün Tepe Noktasının Koordinatları

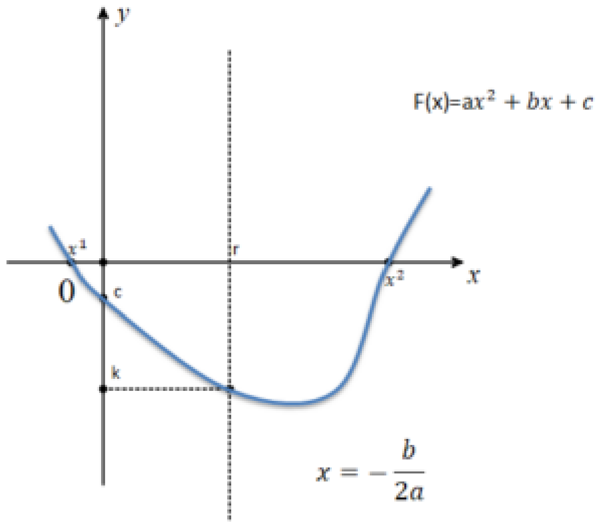
$f(x)= ax^2 + bx + c$ parabol grafiğinde tepe noktası T(r,k) olmak üzere

$r = -\frac{b}{2a}$,

$K=f(r) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ ile bulunur.

$x = -\frac{b}{2a}$ doğrusu parabolün simetri eksenidir.

Yani parabol $x = -\frac{b}{2a}$ doğrusuna göre simetriktir.



Parabolün En Büyük ve En Küçük Değeri

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünde
a > 0 ise parabolün alabileceği en küçük değer parabolün tepe noktasının ordinatıdır.

a < 0 ise parabolün alabileceği en büyük değer tepe noktasının ordinatıdır.

Bu durum parabolün herhangi bir aralıktaki parçası için geçerli değildir.
[a, b] aralığındaki parabolün maksimum-minimum değeri sorulursa tepe noktası T(r, k) olmak üzere f(r), f(a) ve f(b) ye bakılır.

Tepe Noktası ve Bir Noktası Bilinen Parabol Denklemi

T(r, k) parabolün tepe noktası ve $A(x_0, y_0)$ parabol üzerinde bir nokta ise parabolün denklemini bulmak için
$y = a.(x – r)^2 + k$
yazıldıktan sonra a değerini bulmak için verilen nokta yerleştirilir.

x Eksenin Kestiği Noktalar ve Üzerindeki Başka Bir Noktası Bilinen Parabolün Denklemi

f(x) parabolünün x eksenini kestiği noktalar $A(x_1, 0)$ ve $B(x_2, 0)$ ise parabolün denklemi $f(x) = a. (x - x_1) . (x - x_2)$ biçiminde yazılır. Bilinmeyen a değerini bulmak için parabolün üzerindeki nokta denklemde yazılır.

Üç Noktası Bilinen Parabol Denklemi

$A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ ve $C(x_2, y_2)$ noktaları parabolün üzerinde ise üçü de parabolün denklemini sağlar. Bu noktalar parabolün genel denklemi olan
$y=f(x) =ax^2 + bx + c$ de yerleştirilirse üç bilinmeyenleri üç denklem çözülür a, b, c değerleri bulunur.

Bir Doğru İle Bir Parabolün Birbirlerine Göre Durumları

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile
$y = mx + n$
doğrusunun denklemleri birbirine eşitlenip oluşan denklemin diskriminantına bakılır. ($\Delta = b^2 - 4ac$)
$\Delta > 0$ ise parabol ve doğru iki noktada kesişir.
$\Delta = 0$ ise parabol doğruya teğettir.
$\Delta < 0$ ise parabolle doğru kesişmez.
parabolünün x eksenini kesip kesmediğini yorumlamak için x ekseni y = 0 doğrusu olduğundan

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantına bakılır.
$\Delta > 0$ ise parabol x eksenini iki farklı noktada keser.
$\Delta = 0$ ise parabol x eksenine teğettir.
$\Delta < 0$ ise parabol x eksenini kesmez.

Fonksiyonların Dönüşümleri

Tek Fonksiyon

Grafiği orijine göre simetrik olan fonksiyonlar tek fonksiyondur.

Tek fonksiyonda her $x \in R$ için f(-x) = -f(x) sağlanır.
Tek fonksiyonlarda x'in çift kuvvetlerinin olduğu terimlerin katsayıları sıfırdır.

Örnek:

f(x) tek fonksiyon ve

$$3 . f(x) - x = f(-x) + 8x^3 + 3x$$

Çözüm:

f(x) tek fonksiyon olduğuna göre f(–x) = –f(x) yazabilir.

$3 . f(x) - x = -f(x) + 8x^3 + 3x$ olur.

$4 . f(x) = 8x^3 + 4x$

$f(x) = 2x^3 + x$ olur.

$f(2) = 2 . 2^3 + 2$

$= 18$ bulunur.

Çift Fonksiyon

Grafiği y eksenine göre simetrik olan fonksiyonlara çift fonksiyon denir.

Çift fonksiyonlar her $x \in R$ için f(-x) = f(x) olur.
Çift fonksiyonlarda x'in tek kuvvetlerinin olduğu terimlerin katsayıları sıfırdır.

Örnek:

f fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik ve

$$f(x) + 2 . f(-x) = 6x^2 + 12$$

olduğuna göre f(–3) kaçtır?

Çözüm:

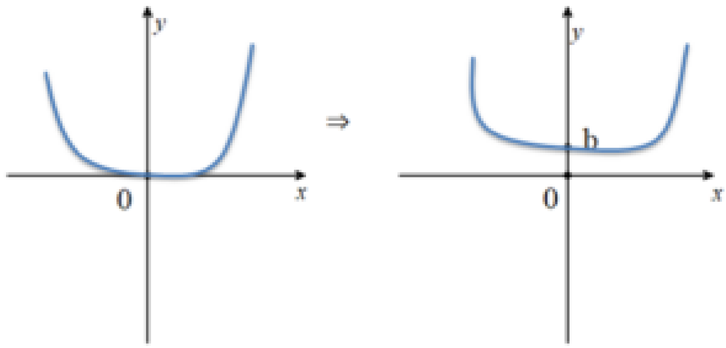
Fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetrik olduğuna göre f(x) çift fonksiyondur ve $f(-x) = f(x)$ tir.

$$f(x) + 2 \,.\, f(-x) = 6x^2 + 12$$
$$f(x) + 2 \,.\, f(x) = 6x^2 + 12$$
$$3 \,.\, f(x) = 6x^2 + 12$$
$$f(x) = 2x^2 + 4 \quad \text{olur.}$$

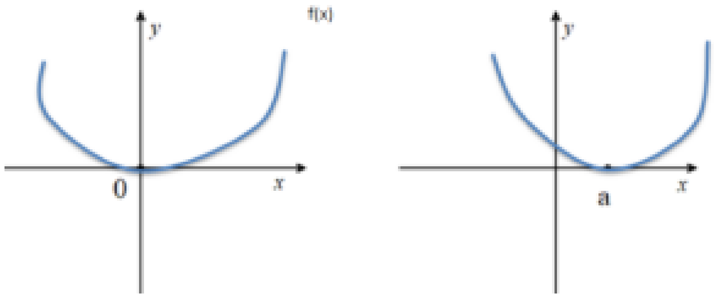
$f(-3) = 2 \,.\, (-3)^2 + 4 = 22$ bulunur.

Fonksiyonların Dönüşümleri

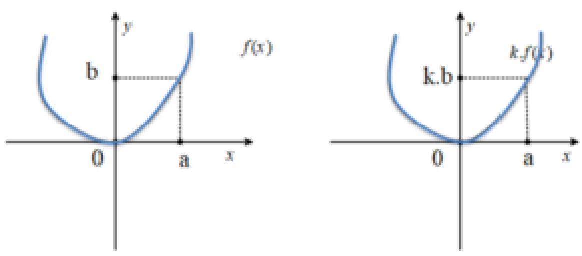
♦ b € R olmak üzere f(x)+b fonksiyonunun grafiği f(x) fonksiyonun grafiğinin b birim yukarı ötelenmesi ile elde edilir.



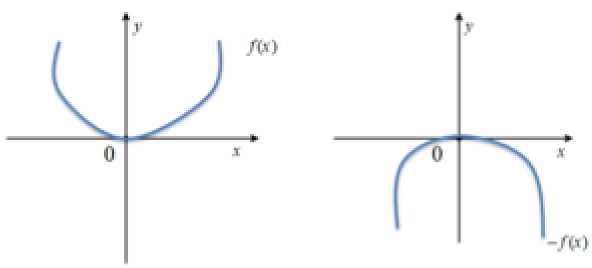
♦a € R olmak üzere f(x-a) fonksiyonunun grafiği f(x) fonksiyonunun grafiğinin x ekseninde a birim ötelenmesi ile elde edilir.



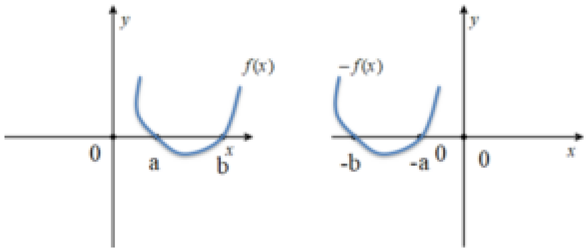
k € R olmak üzere k. f(x) fonksiyonunun grafiği f(x) fonksiyonundaki değerlerin k ile çarpılması ile elde edilir.



-f(x) fonksiyonunun grafiği f(x) fonksiyonunun x eksenine göre simetriği alınarak elde edilir.



f(-x) fonksiyonunun grafiği f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği alınarak elde edilir.



4. ÜNİTE : DENKLEM VE EŞİTSİZLİK

İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

a, b, c ∈ R ve a ≠ 0 olmak üzere,

$ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki eşitliklere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.
***** Denklemi sağlayan x gerçek (reel) sayılarına **denklemin kökleri** denir.
*****Köklerin oluşturduğu kümeye **çözüm kümesi (doğruluk kümesi)** denir.
*****Kökler denklemi sağlar.

Çarpanlara Ayırma Yöntemi İle Kök Bulma

Çarpanlara Ayırma Yöntemi

$ax^2 + bx + c = 0$ denklemi f(x) . g(x) = 0 şeklinde yazılabiliyorsa f(x) = 0 veya g(x) = 0 dır.

$x^2 + 5x + 6 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

ÇÖZÜM:

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 2) . (x + 3) = 0$

↓	↓			
x	2		$x + 2 = 0$	$x + 3 = 0$
x	3		$x = -2$	$x = -3$ tür.

O hâlde, verilen denklemin çözüm kümesi;

{−3, −2} şeklinde bulunur.

Δ (Delta) ile Kök Bulma

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantı (delta) $\Delta = b^2 - 4ac$ 'dir.

Δ> 0 ise denklemin farklı iki gerçek (reel) kökü vardır.

Bu kökler $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ dır.
Δ= 0 ise denklemin birbirine eşit (çakışık , çift katlı) iki gerçek (reel) kökü vardır.

Bu kökler $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ dır.

Δ< 0 ise denklemin gerçek(reel) kökü yoktur.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler ve Eşitsizlik Sistemleri

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

a, b € R ve a ≠ 0 olmak üzere ax + b < 0, ax + b ≤ 0, ax + b > 0 ve ax + b ≥ 0 şeklinde ifade edilebilen eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

$\frac{3x-1}{2}+\frac{2x}{3}<1+\frac{x-2}{6}$ Eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$\frac{3x-1}{2}+\frac{2x}{3}<1+\frac{x-2}{6}$ (Eşitsizliğin her iki tarafını 6 ile çarpalım.)

$3(3x-1)+2.2x<6+(x-2)$
$9x-3+4x<6+x-2$
$13x-3<x+4$
$12x<7$

$x<\frac{7}{12}$

$Ç.K.=\left(-\infty,\frac{7}{12}\right)$

$ax+b>0 \Rightarrow x>-\frac{b}{a} \Rightarrow x\in\left(-\frac{b}{a},+\infty\right)$

$ax+b\geq 0 \Rightarrow x\geq-\frac{b}{a} \Rightarrow x\in\left(-\frac{b}{a},+\infty\right)$

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemleri

Denklem sistemlerinde olduğu gibi, değişkenleri aynı olan birden fazla eşitsizliğe eşitsizlik sistemi denir. Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde bulunan (x, y) sıralı ikililerinin, ortak bir çözüm olması için sistemde bulunan her eşitsizliği sağlamalıdır.

$2x-3y<1$

$x+y\geq 2$

ifadeleri ise birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik sistemidir.

Eşitsizliklerin Grafik Çizimi

Eşitsizlik sembolünü "=" sembolüne çevirerek bir denklem elde edilir. Bu denklemin grafiği çizilir. <, > sembolleri için kesikli çizgi, ≥, ≤ sembolleri için grafik düz çizgi olarak çizilir.
Denklem grafiğinin iki bölgeye ayırdığı koordinat düzleminin herhangi bir tarafından bir nokta alınıp eşitsizlikte yerine koyarak sağlayıp sağlamadığını kontrol edilir.
Genel olarak doğrunun grafiği orijinden geçmiyorsa, (0, 0) noktası test noktası olarak alınabilir.
Test edilen nokta eşitsizliği sağlıyorsa noktanın bulunduğu bölge, sağlamıyorsa diğer bölge taranır.

Eşitsizlik Sistemleri

Denklem sistemlerinde olduğu gibi, değişkenleri aynı olan birden fazla eşitsizliğe eşitsizlik sistemi denir. Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde bulunan (x, y) sıralı ikililerinin, ortak bir çözüm olması için sistemde bulunan her eşitsizliği sağlamalıdır.

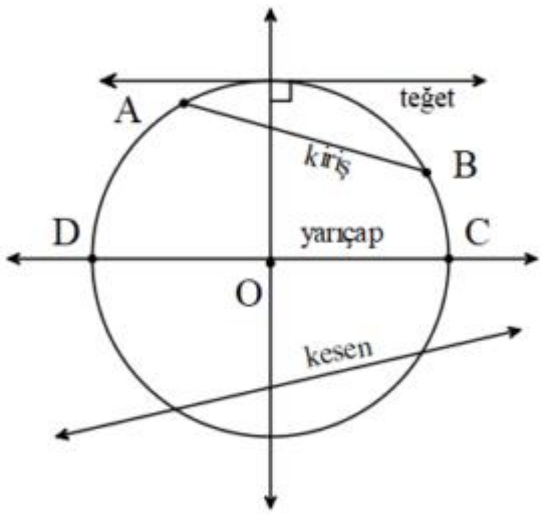
5. ÜNİTE : ÇEMBER VE DAİRE

Düzlemde sabit olan bir noktadan eşit uzunluktaki noktaların oluşturduğu kümeye **çember** denir.
O noktası çemberin merkezi olmak üzere ;

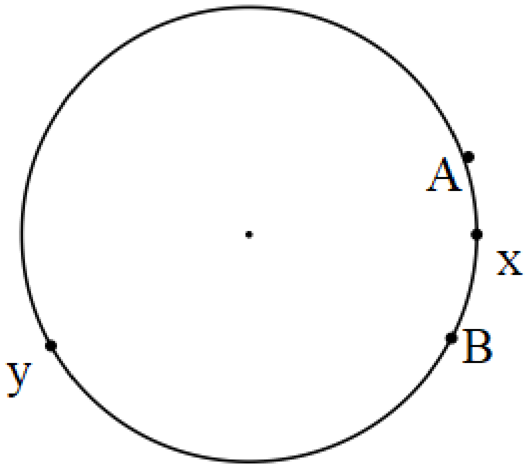
yarıçap=r=|QA|=|OB|
çemberin çapı=|AB|
|AB| =2r'dir.

Çemberin Elemanları

Düzlemde sabit bir noktaya (merkez) eşit uzaklıkta (yarıçap) bulunan noktalar kümesine **çember** denir.

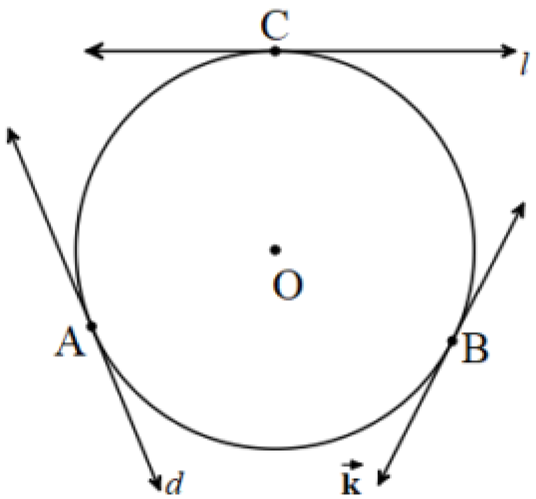


Yay: Bir çember üzerindeki farklı iki nokta arasında kalan çembere ait noktalar kümesine **çember yayı** denir.

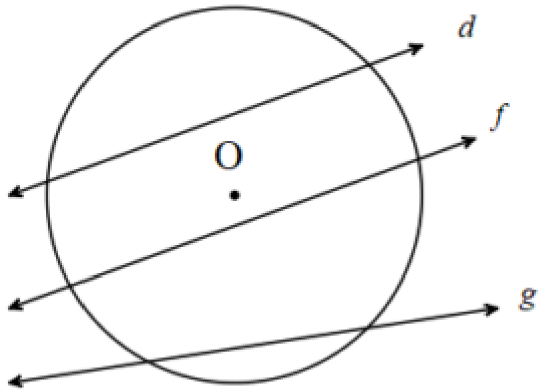


A ve B noktaları arasındaki yaylar AxB ve AyB yaylarıdır.

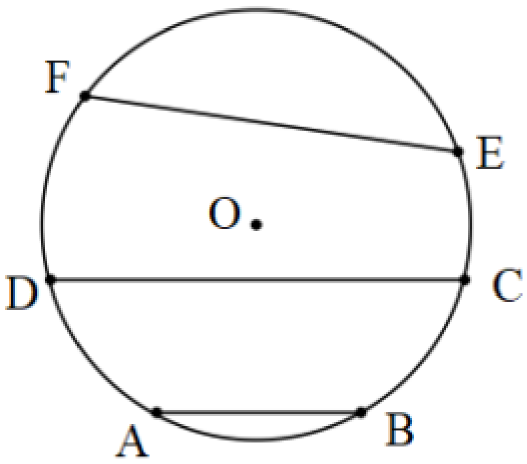
Teğet: Bir çember ile tek bir ortak noktası olan doğruya çemberin bir **teğet doğrusu** denir.



d,k,*l* O merkezli çemberin herhangi üç teğet doğrusudur.
Kesen: Çemberi farklı iki noktada kesen doğruya **çemberin keseni** denir.

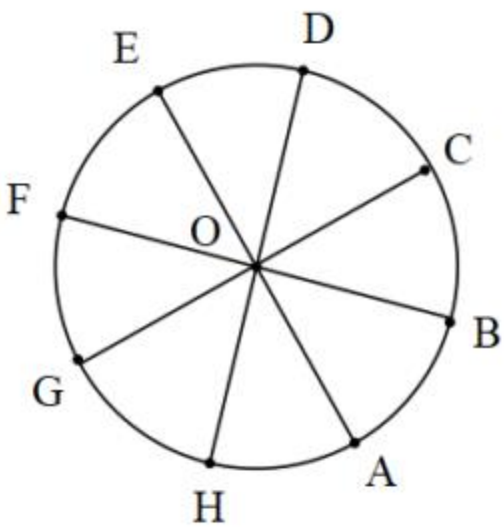


d,e,f doğruları O merkezli çemberin kesenleridir.
Kiriş: Bir çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına çemberin kirişi denir.



[AB], [DC], [EF] doğru parçaları O merkezli çemberin kirişleridir.

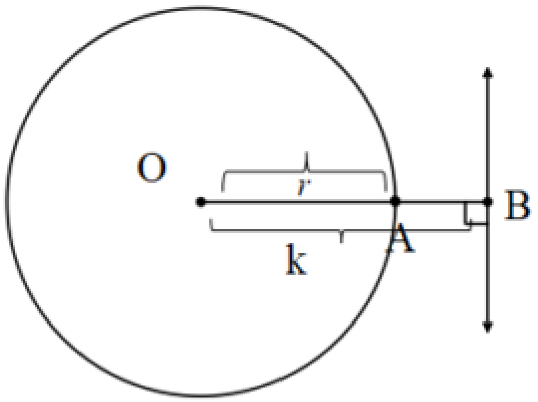
Çap: Merkezden geçen kirişe **çap** denir.



[AE],[BF],[CG],[DH] doğru parçaları O merkezli çemberin çap doğrusudur. Bu doğruların uzunlukları çemberin çap uzunluğu olur.

Bir Düzlemde Bir Çember ile Bir Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları

Doğru çemberi kesmez

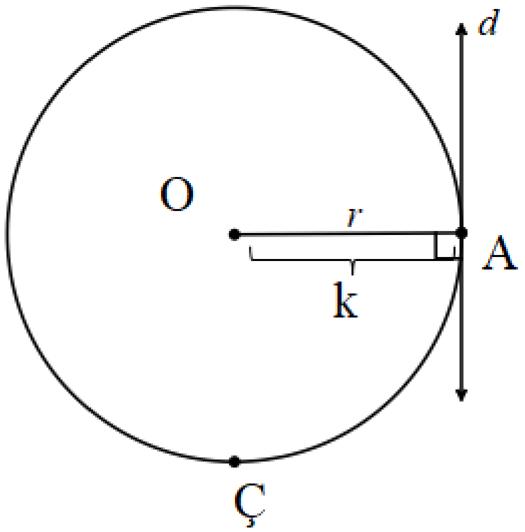


O noktasından doğruya olan uzaklık (dik) yarıçaptan büyük ise doğru ile çember kesişmez.

[OB] ⊥ d, |OA|=r, |OB|=k

k>r ise d∩ Ç= {} olur.

2. Doğru çembere teğet olur.

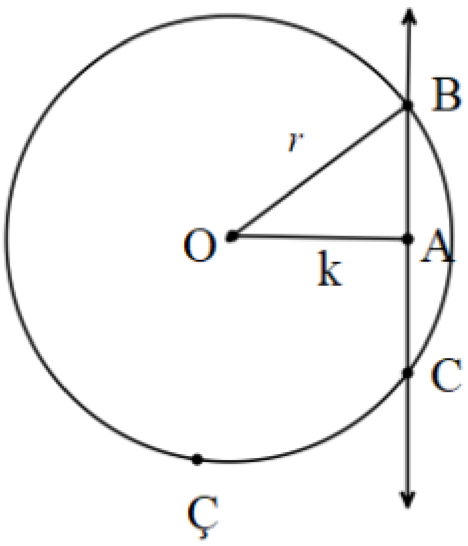


Çemberin merkezinin d doğrusuna olan uzaklığı yarıçapa eşit olduğunda “çeber doğruya teğettir” denir. Çember ile doğrunun bu durumda tek bit ortak noktası (A) olur.

[OA] ⊥ d, |OA|=k

k=r ise d∩ Ç= {A} olur.

3.Çember ile doğru farklı iki noktada kesişir.



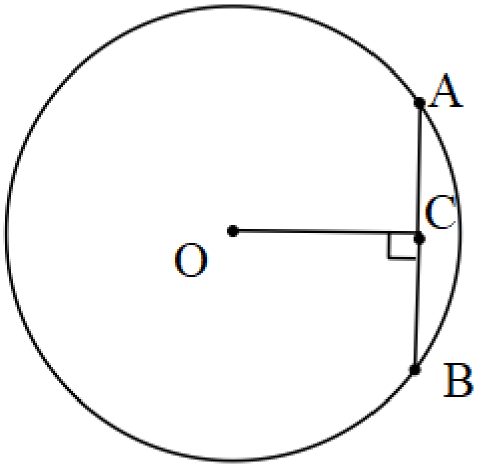
Çember merkezinden doğruya olan uzaklık çemberin yarıçapından küçük ise doğru çemberi iki farklı noktada keser.

[OA] ⊥ d, |OA|=k |OB|=k

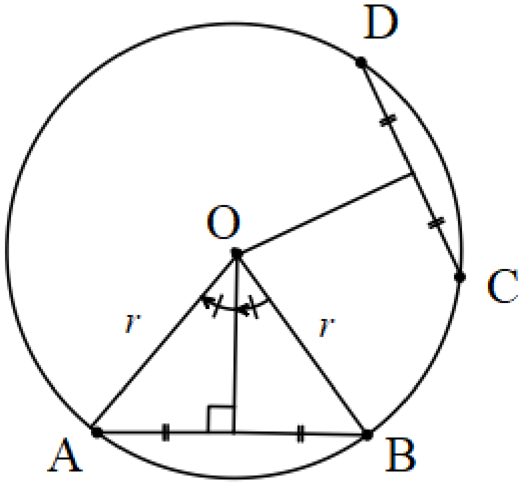
r>k ise d∩ Ç= {B,C} dir.

Çemberde Kirişin Özellikleri

1. Bir çemberin merkezinden herhangi bir kirişe çizilen dik doğru kirişi iki eş parçaya ayırır.

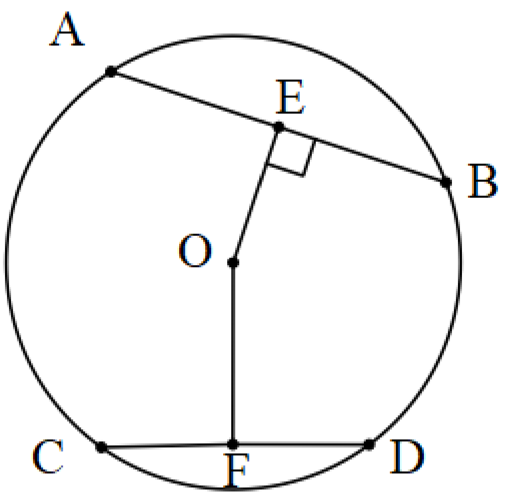


[OC] ⊥ [AB] ⇔ |AC|=|CB|



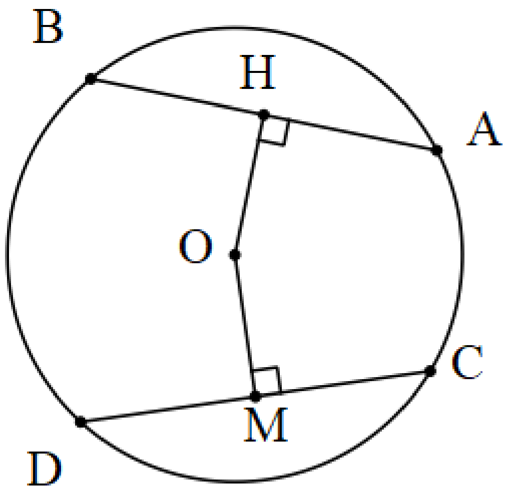
bu durumda AOB üçgeni ikizkenar üçgen olur.

2. Bir çemberde eşit uzunluktaki kirişlerin çemberin merkezine olan uzaklıkları eşittir.



|AB|=|CD| ⇔ |OE|=|OF|

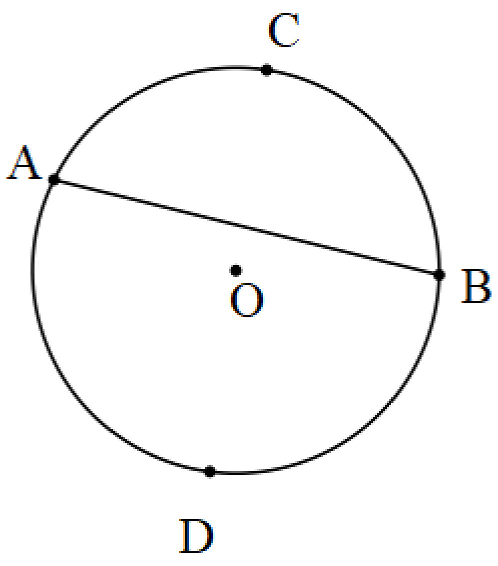
3. Bir çemberde kiriş merkeze yaklaştıkça uzunluğu artar.



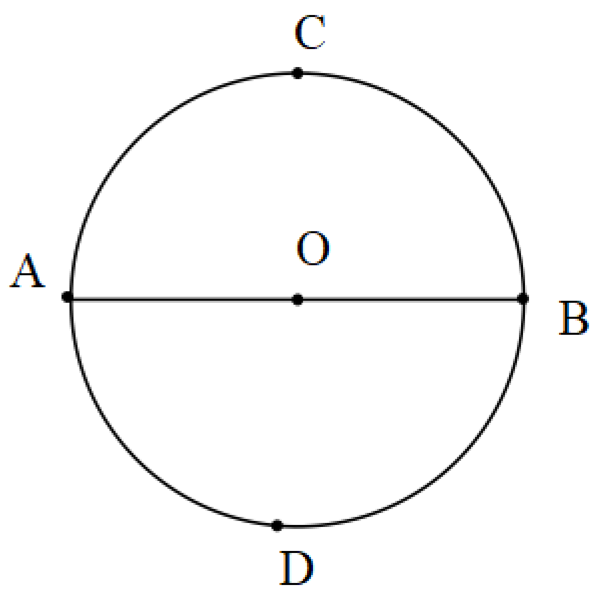
|OH|>|OM| ⇔ |AB|=|CD|

Çemberde Açı Çevrel Çember ve Sinüs Teoremi

Çemberin iki noktası arasında kalan çember parçasına yay denir.

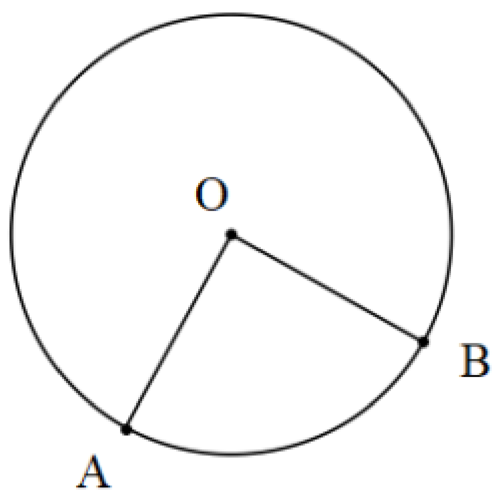


ACB yayı veya $\overset{\frown}{ACB}$ şeklinde ifade edilir. Yay ölçü birimi derecedir. [AB] krişinin sınırladığı yay denince küçük olan ACB yayı anlaşılır.

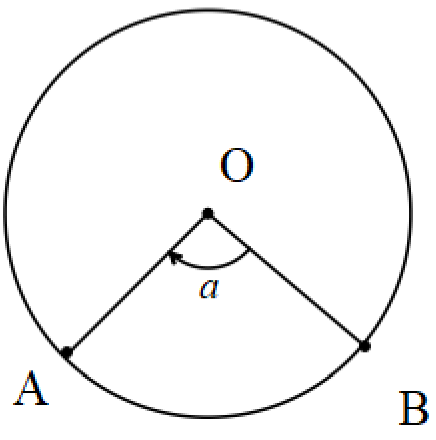


$m(\overset{\frown}{ACB}) = m(\overset{\frown}{ADB}) = 180$ derecedir.
Bu ifade $|\overset{\frown}{ACB}| = |\overset{\frown}{ADB}|$ şeklindede gösterilebilir.

Merkez Açı



O merkez [OA ve [OB ışın AOB açısının gördüğü yay AB yayıdır.

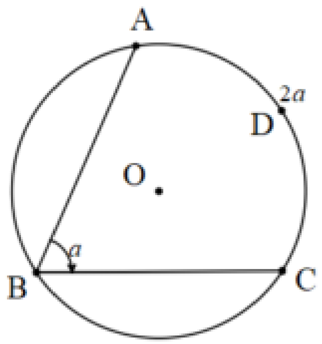


Merkez açı gördüğü yaya eşittir.

$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB}) = \alpha°$

Çevre Açı

Köşesi çember üzerinde ve kenarları çember kirişi olan açıya çevre açı denir.



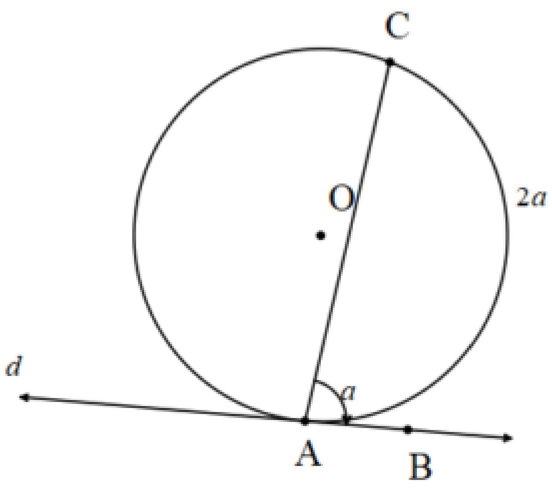
$$m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{ADB})}{2}$$

O merkez [AB] ve [BC] çember krişi B oktası çember üzerinde ve ABC açısının köşesidir.

Çevre açı gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

Teğet-Kiriş Açı

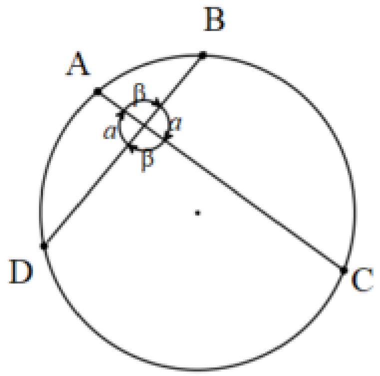
Bir çemberde teğet doğrusu ile kiriş arasında kalan açıya teğet kiriş açı denir. A noktası çember ile doğrunun ortak teğet noktasıdır.



Teğet - kiriş açı aynı zamanda çevre açı olduğundan gördüğü yayın yarısına eşittir.

Çemberde İç Açı

[BD] ∩[AC]={K} çemberde kesişen iki kirişin oluşturduğu açıya iç açı denir.



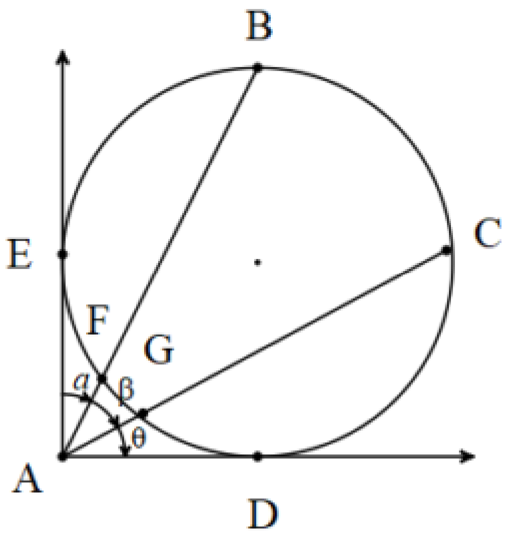
$$a = \frac{|\overset{\frown}{CD}| + |\overset{\frown}{AD}|}{2}$$

$$\beta = \frac{|\overset{\frown}{AB}| + |\overset{\frown}{DC}|}{2}$$

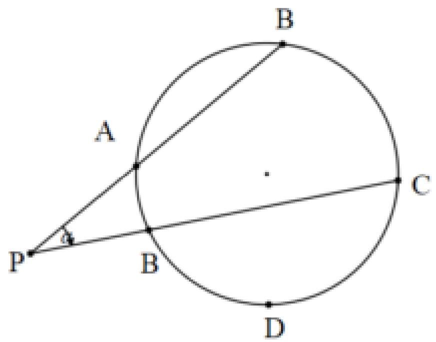
Çemberde Dış Açı

Köşesi (a) çemberin dış bölgesinde olan iki kesenin iki teğetin veya bir teğet ile bir kesenin oluşturduğu açıya dış açı denir.

a,β,θ birer dış açıdır.



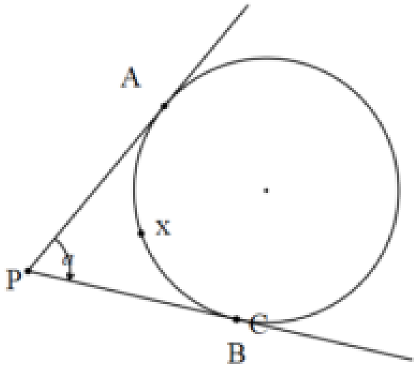
Çemberde dış açı gördüğü çember yayların farkının yarısıdır.



$$a = \frac{|\overset{\frown}{CD}| - |\overset{\frown}{AB}|}{2}$$

Teğetler Arasında Kalan Dış Açı

A ve B teğet noktalarıdır. APB açısı teğetler arasında kalan açıdır. Bu açı aynı zamanda bir dış açıdır.

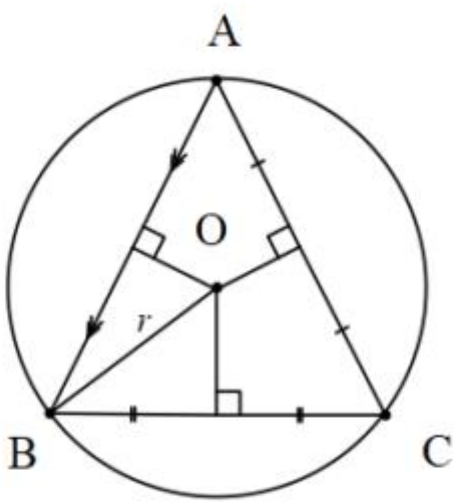


$$\alpha + m(\overset{\frown}{AxB}) = 180°$$

Teğetler arasında açı ile bu açının gördüğü küçük yayın toplamı 180º'dir.

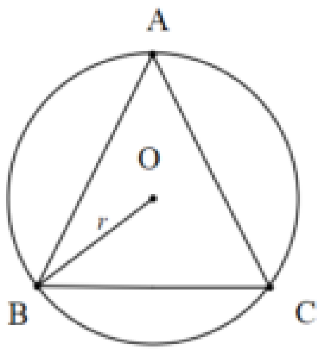
Bir Üçgenin Çevrel Çemberi

O merkezli r yarıçaplı çember ABC üçgeninin çevresel çemberidir.



Sinüs Teoremi

Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı r olmak üzere;

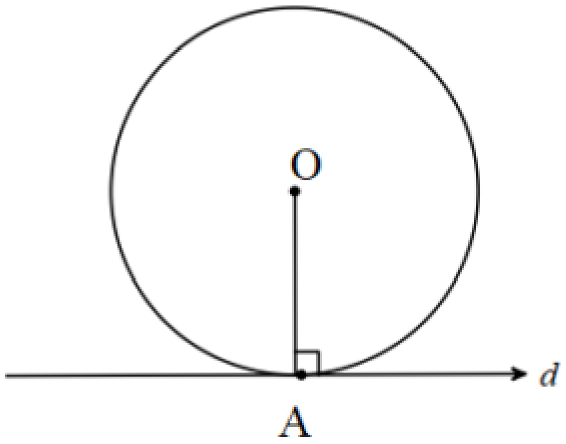


$$\frac{|BC|}{\sin\hat{A}} = \frac{|AB|}{\sin\hat{C}} = \frac{|AC|}{\sin\hat{B}} = 2r$$

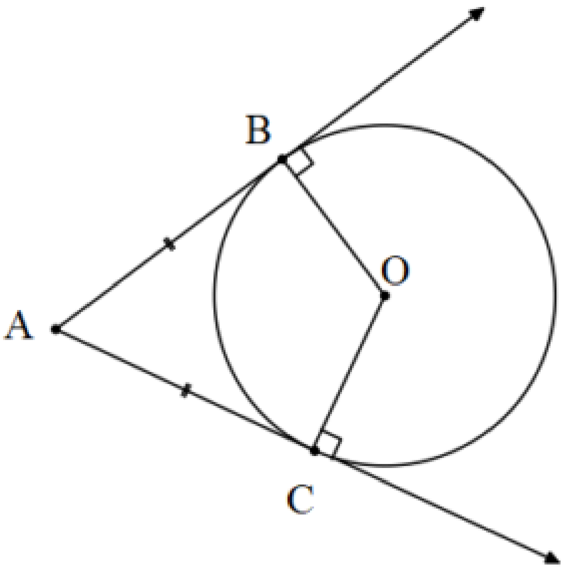
Çemberde Teğet

Bir çembere herhangi bir noktadan çizilen teğet değme noktası olan A'da yarıçapa diktir.

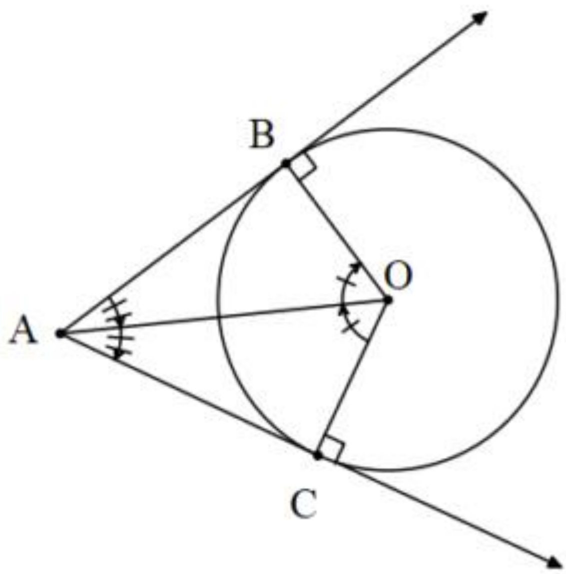
$[OA] \perp d$



1. Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet uzunlukları eşittir.

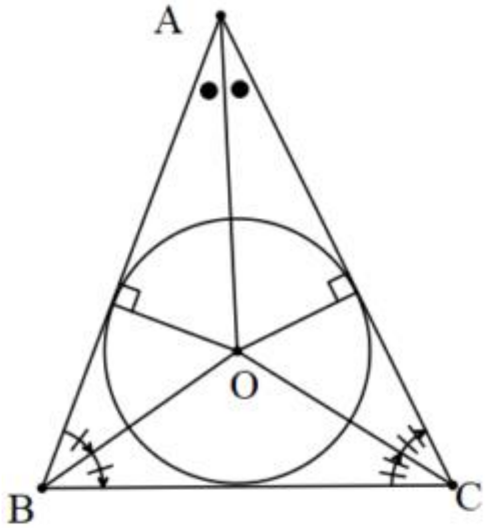


Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğetlerin arasında kalan ve çemberi gören açının açıortayı çemberin merkezinden geçer.



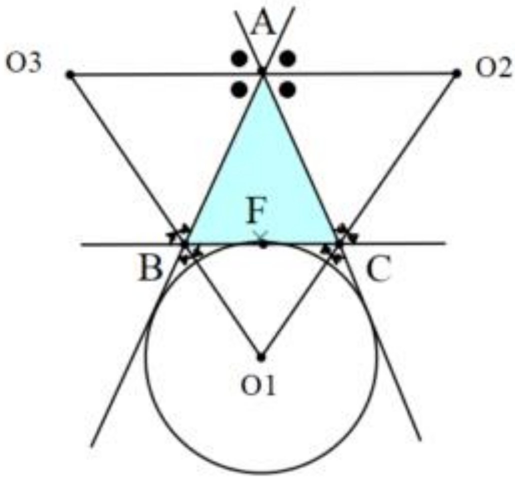
[OA] ABOC dörtgeninde açıortaydır.
$m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{OAC})$
$m(\widehat{BOA}) = m(\widehat{AOC})$

2. İç Teğet Çember



ABC üçgeninde açıortayların kesim noktası iç teğet çemberin merkezi olur.

3. Dış Teğet Çember



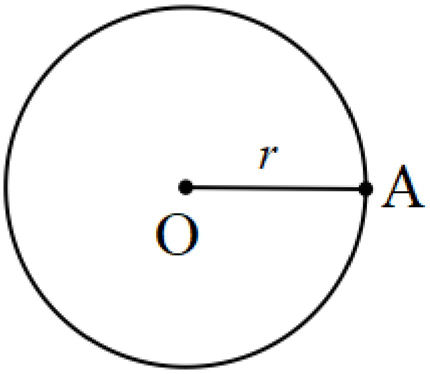
İki dış açının açıortaylarının kesim noktası üçgenin dış teğet çemberinin merkezidir. Şekilde O_1, O_2, O_3 noktaları ABC Üçgeninin dış teğet çemberlerinin merkezleridir.

Dairenin Çevresi ve Alanı

Dairenin Çevresi

O merkezli çemberin yarıçapı r ise

Çevre=2.π.r'dir



Çember A noktasından açıldığında çevre;

A ______ $2.\pi.r$ ______ A'

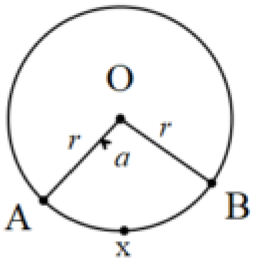
Şeklindeki bir doğrunun uzunluğudur.

Buradaki π (pi) sayısı

$\pi = 3,14159...$ dir.

Daire Dilimin Yay Uzunluğu

Yarıçapı r olan bir çemberde *a* derecelik merkez açının gördüğü AxB yayının uzunluğu;

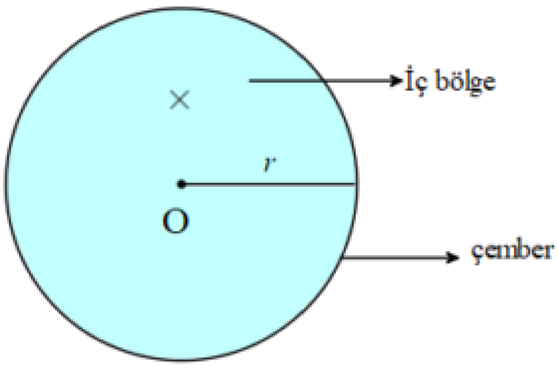


$$|\overset{\frown}{AxB}| = \frac{2\pi.r.a}{360°}$$

şeklinde hesaplanır.

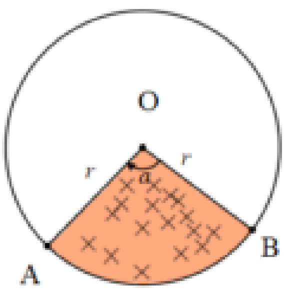
Daire ve Alanı

Çember ve iç bölge birleşimine daire denir.



Dairenin Alanı $=\pi.r^2$ birimkaredir.

Daire Diliminin Alanı

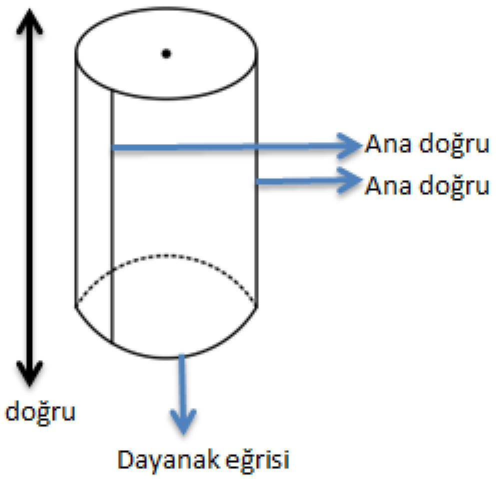


Yarıçapı r, merkez açısı *a* derece olan dilimin alanı

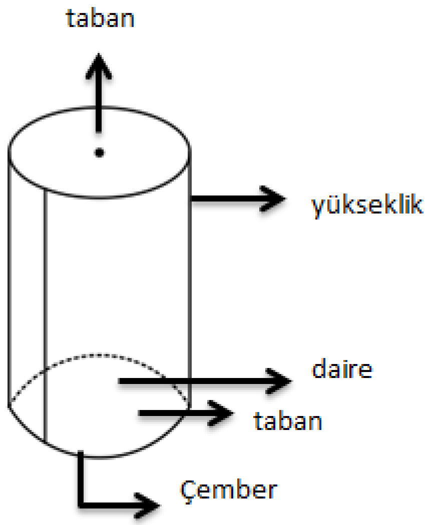
$$\text{Taralı Alan} = \frac{\pi.r^2.a°}{360°}$$

6. ÜNİTE : KATI CİSİMLER

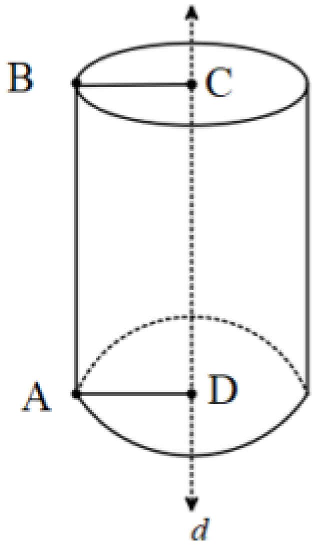
Dik Dairesel Silindir Alan ve Hacim Bağıntıları



Düzlemsel bir eğriyle bu eğrinin düzleminde bulunmayan bir doğru verildiğinde daima bu doğruya paralel kalmak koşuluyla eğriye dayanarak hareket eden bir doğrunun taradığı yüzeye **silindirik yüzey** denir. Silindirik yüzeyle bu yüzeyi kesen iki düzlemin sınırladığı cisme **silindir** denir. Silindir yüzeyini oluşturan doğruların her birine **ana doğru** denir.

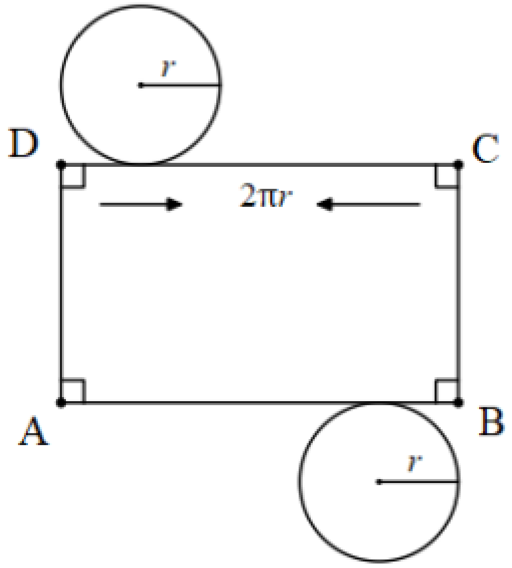


Dik Dairesel Silindir veya Dönel Silindir



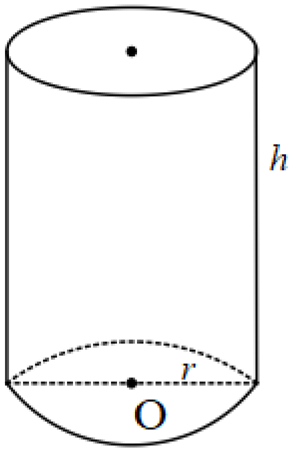
Yukarıdaki silindirler ABCD dikdörtgeninin [CD] etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilmiştir.

Dik Dairesel Silindirin Alanı



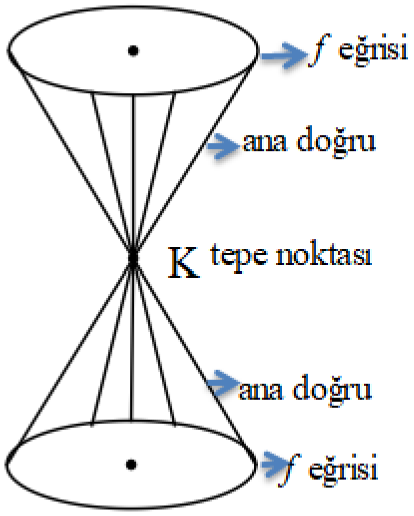
Şekli elde edilir. Burada ABCD bir dikdörtgendir.
|AB| = 2 . π . r (Çemberin çevresi)
Yanal Alan:
A(ABCD) = $2\pi r \cdot h$
Yüzey (bütün) Alan:
A(ABCD) + 2 Dairenin alanı
Alan = $2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

Dik Dairesel Silindirin Hacmi

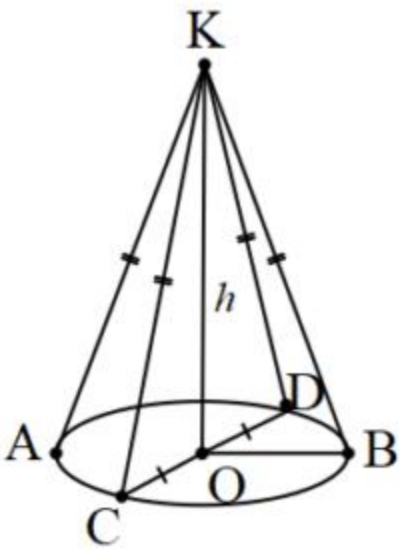


Silindirin tabanı daire olduğundan dairenin alanı πr^2 dir.
Hacim (silindir) = $\pi r^2 . h$ br^3

Dik Dairesel Koni Alan ve Hacim Bağıntıları

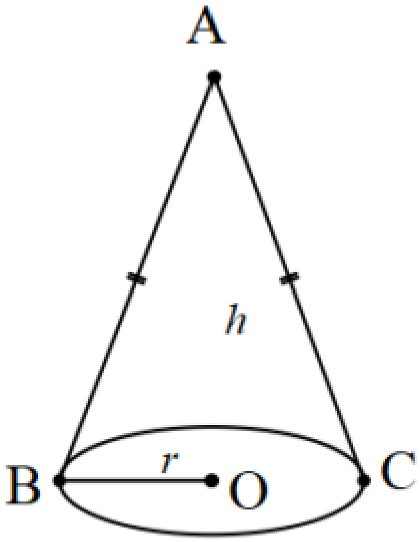


Sabit bir K noktasından geçen ve sabit f eğrisine dayanan doğruların oluşturduğu yüzeye **koni** denir.

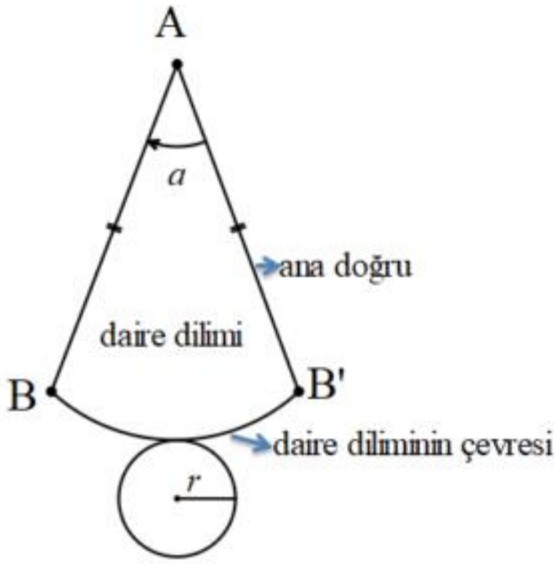


Taban düzlemi daire olan piramitlere koni denir. Koninin yükseklik ayağı dairenin merkezinden geçiyorsa bu koniye **dik koni** denir. Dik dairesel konide tabana paralel her kesit bir dairedir.

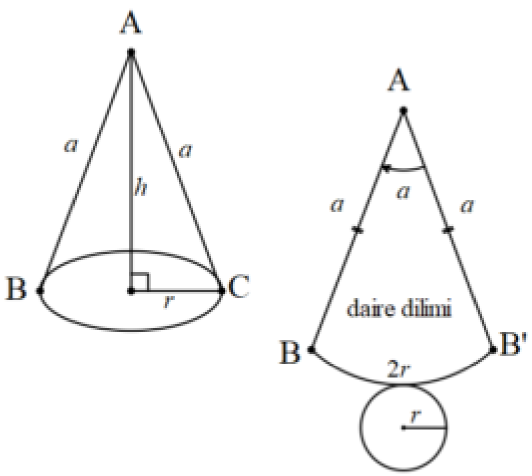
Dik Koni



Dik Koninin Düzleme Açılımı



Dik Dairesel Koninin Alanı



ABB' daire diliminin çevresi

$$\frac{2\pi \cdot a \cdot \alpha}{360°} = 2\pi r$$

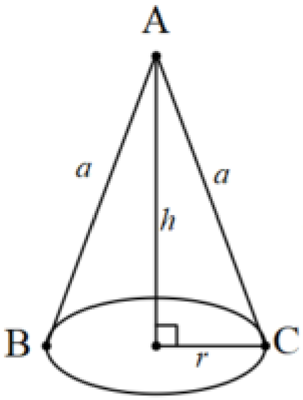
$$\frac{a \cdot \alpha}{360°} = r \Rightarrow \frac{\alpha}{360°} = \frac{r}{a}$$

ABB' daire diliminin alanı

$$\frac{\pi a^2 \cdot \alpha}{360°} = \pi a^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

$$= \pi a^2 \cdot \frac{r}{a} = \pi r a$$

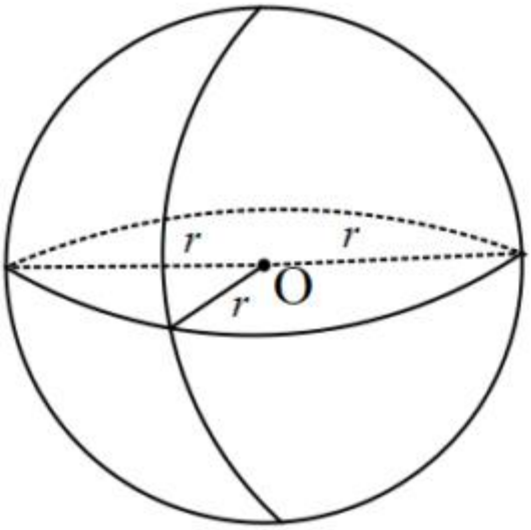
Dik Koninin Hacmi



Dik koninin hacmi

$$V \text{ koni} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} br^3$$

Küre Alan ve Hacim Bağıntıları

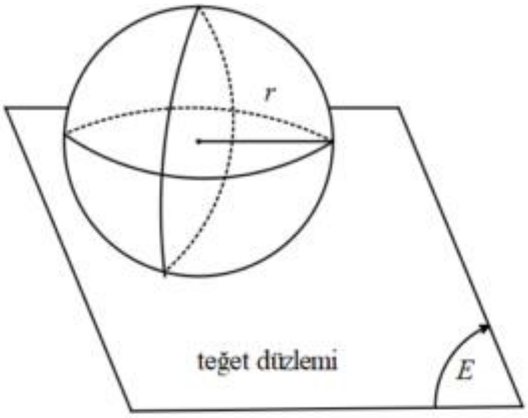


Bir noktadan sabit uzaklıktaki noktalar kümesine;

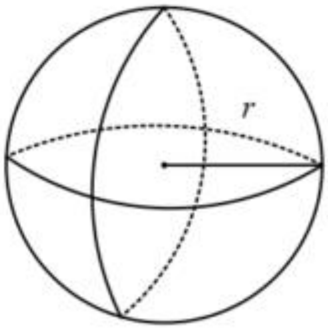
*****Küre yüzeyi
*****noktaya küre yüzeyinin merkezi
*****sabit uzaklığa küre yüzeyinin yarıçapı
*****küre yüzeyinin sınırladığı bölgeye
küre denir.

Bir küre yüzeyi ile kürenin merkezinden geçen düzlemin ara kesitine küre yüzeyinin büyük çemberi denir.

Kürenin Alanı



Kürenin Hacmi



Yarıçap uzunluğu r olan bir kürenin hacmi

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \ br^3$$

Bir düzlem bir küreyi birden çok noktada keserse arakesit bir dairedir.

7. ÜNİTE : OLASILIK

Bir madeni para havaya atıldığında yazı mı yoksa tura mı geleceğini, bir zar atıldığında üst yüzeye gelen sayının kaç olacağını veya bir torbadan rastgele alınan bir nesnenin özelliklerini (renk, sayı, vs.) tespit etme işlemine **deney** denir.
Deneyde yapılan işlemin her bir görüntüsüne (çıktısına) verilen isime **sonuç** denir.
Bir deneyin muhtemel bütün sonuçlarını eleman kabul eden kümeye **örnek uzay** denir.
Herhangi bir örnek uzayın her bir alt kümesine olay denir. Olay kendi arasında 2'e ayrılır. Boş kümeye **imkansız olay**, örnek uzaya da **kesin olay** denir.
Bir olayın gerçekleşme ya da gerçekleşmemesi derecesi [0, 1] aralığındaki bir gerçek sayıyla belirtilmiş biçimine **olasılık** denir. Kesin olayların olasılığı 1, imkansız olayların olasılığı 0 dır.
A olayının olma olasılığı ……… P(A)
A olayının olmama olasılığı ……… P(A')
P(A) + P(A') = 1, P({ }) = 0

Her bir olayın olasılıkları eşit olan hilesiz bir örneklem uzaya eş olumlu (eşit olasılığa sahip) **örneklem uzayı** denir.

A olayının eleman sayısı ……… S(A)
E (örnek uzay) olayının eleman sayısı …… S(E)
olmak üzere; A olayının olasılığı

$$P\left(A\right) = \frac{s(A)}{s(E)}$$

$$P\left(A\right) = \frac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{E olayının eleman sayısı}}$$

Koşullu Olasılık

Eş olumlu örneklem uzayının herhangi Ave B olayları için (P(B) ≠ 0) B olayının gerçekleşmesi halinde, A olayının gerçekleşmesi olasılığına A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı denir ve P(A \ B) ile sembolize edilir.

$$P\left(A \setminus B\right) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ayrık Olaylar

Bir örneklem uzaya ait iki olayın kesişimi boş küme ise bu iki olaya ayrık olaylar denir. A ve B, E örnek uzayda ayrık olaylar ise
P(A ∩ B) = 0 olur.

Bağımlı ve Bağımsız Olaylar

Bağımsız Olay

Bir olayın gerçekleşip gerçekleşmediği diğer bir olayın gerçekleşmesine bağlı değil ise yani bir olayın sonucu diğer olayın sonucunu etkilemiyorsa böyle olaylara **bağımsız olaylar** denir.
Örneğin: Bir torbada 1'den 10'a kadar numaralandırılmış 10 tane eş kart vardır. Çekilen kart geriye atılmak şartıyla rastgele seçilen iki karttan ilkinin 5, ikincisinin 6 olması olayını inceleyelim.
Torbadan çekilen kart geri atıldığı için ilk çekilen kart ikinci çekilecek kartı etkilemeyecektir. Torba içinde herhangi bir değişiklik olmayacaktır. Bu yüzden bu iki olay bağımsız olaylardır.

Bağımlı Olay

Bir olayın gerçekleşip gerçekleşmediği diğer bir olayın gerçekleşmesine bağlı ise yani bir olayın sonucu diğer olayın sonucunu etkiliyorsa böyle olaylara **bağımlı olaylar** denir.
Örneğin: Bir sınıftaki öğrencilerin isimleri kartlara yazılıp torbaya atılıyor. Çekilen kartı torbaya geri atmamak şartıyla art arda çekilen iki karttan ilki sınıf başkanı, ikincisi sınıf yardımcısı olacaktır.
Başkan seçilen kişi yardımcı olamayacağı için, yani seçilen kartı tekrar seçemeyeceğimiz için (torbaya geri atılmıyor) bu iki olay bağımlı olaylardır.

Bileşik Olayların Olasılığı

İki veya daha fazla olaydan elde edilmiş olaya **bileşik olay** denir.
A ve B olayları;

Ayrık değilse ⇒ P(A veya B)= P(A)+ P(B)- P(A∩B)

Ayrık iseler ⇒P(A veya B)= P(A)+ P(B) şeklinde bileşik olma olasılıkları bulunur.

Deneysel ve Teorik Olasılık

Olasılık çeşitler 3'e ayrılır. Bunlar; **Teorik**, **Deneysel** ve **Öznel** olasılıktır.

Teorik Olasılık

Deney yapmadan olasılık sonucunun hesaplanarak bulunduğu olasılık çeşididir. Deneysel olasılıktaki deneme sayısı arttırıldığında sonucun teorik olasılığa yaklaştığı görülür.

Örneğin: Bir zar atılması olayında örnek uzay, E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} olup eş olasılıklı örnek uzaydır. Atılan zarın üst yüzüne asal sayı gelme durumu A olayı ise A = {2, 3, 5}'tir.

Bu durumda, A olayının teorik olasılığı = $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Deneysel Olasılık

Bir olayın olma olasılığının yapılan deneylere göre hesaplanmasıdır. Yapılan bir deneyde, olayın gerçekleşme sayısının deney sayısına oranına, olayın **deneysel olasılığı** denir. Eş olasılıklı bir örnek uzayda, bir olayın deneysel olasılık değeri, deneme sayısı arttıkça olayın teorik olasılık değerine yaklaşır.

$$P(A) = \frac{Gerçekleşme\ Sayısı}{Deneme\ Sayısı}$$